

23.	<p>The following expression</p> <p><b><math>\lg (\operatorname{tg} 1^{\circ}) + \lg (\operatorname{tg} 2^{\circ}) + \dots + \lg (\operatorname{tg} 89^{\circ})</math></b> is equal to</p> <p><i>Solution:</i> To solve this trigonometrical expression you must remember, that</p> <p><b><math>\operatorname{tg}(90^{\circ} - \alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha</math></b> where <b><math>0 &lt; \alpha &lt; 90^{\circ}</math></b>.</p> <p>If we group extreme members like , <b><math>\lg (\operatorname{tg} 1^{\circ})</math></b> and <b><math>\lg (\operatorname{tg} 89^{\circ})</math></b> it is easy to see, that</p> <p><b><math>\lg (\operatorname{tg} 1^{\circ}) + \lg (\operatorname{tg}(90^{\circ} - 1)) = \lg (\operatorname{tg} 1^{\circ} \cdot \operatorname{ctg} 1^{\circ}) = 0</math></b>.</p> <p>If to continue these argumentations, we will have finally that our expression is equal to <b><math>\lg (\operatorname{tg} 45^{\circ}) = 0</math></b>.</p> <p><b>Answer: 0.</b> (27 points)</p>	<p>a) -1; b) 0; c) 1; d) <math>\pi/4</math>; e) 2.</p>
-----	--	--

**С.Н. Скляр,**

*д. ф.-м. н., профессор направления  
«Естественные науки и информационные технологии»,  
ассоциированный вице-президент по академическим вопросам,  
Американский университет в Центральной Азии*

**М.А. Рылов**

*научный сотрудник  
Института коммуникаций и информационных технологий,  
Кыргызско-Российский Славянский университет*

## Об аппроксимации уравнений движения в задачах о циркуляции жидкости в водоеме

Математическая модель циркуляции жидкости в водоеме основана на системе полных нелинейных уравнений гидротермодинамики, записанных в традиционных приближениях, и включает уравнения движения, статики, неразрывности, переноса тепла, а также уравнение состояния [4]. В настоящей работе мы рассмотрим только систему

уравнений движения и предложим ее аппроксимацию, основываясь на проекционном варианте интегро-интерполяционного метода (ПВИИМ) [8].

Система уравнений движения определяет горизонтальные компоненты  $u, v$  вектора скорости и может быть записана в виде:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \ell \cdot v - \frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial u}{\partial z} \right) = f_1(u, v), \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \ell \cdot u - \frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial v}{\partial z} \right) = f_2(u, v). \end{cases} \quad (1)$$

Правые части уравнений в системе (1) включают градиенты давления, члены адвективного переноса и слагаемые, отвечающие за горизонтальную диффузию. Учет этих величин в процессе численного решения системы (1) обычно производится с явного временного слоя или осуществляется методом последовательных приближений, поэтому в настоящей работе мы будем считать функции  $f_1$  и  $f_2$  заданными. Система (1) дополняется граничными условиями, параметризующими напряжение ветра на поверхности и трение о дно водоема:

$$\begin{cases} z = 0 : k \frac{\partial u}{\partial z} = -\tau_x, k \frac{\partial v}{\partial z} = -\tau_y; \\ z = H : k \frac{\partial u}{\partial z} = -\tau_x^b, k \frac{\partial v}{\partial z} = -\tau_y^b; \end{cases} \quad (2)$$

а также начальными условиями:

$$t = 0 : u = u_0, v = v_0 \quad (3)$$

Некоторые классы аналитических решений задачи (1)–(3) были описаны в ряде работ [1; 3], мы будем использовать их для тестирования разностных схем. При относительно малых значениях коэффициента вертикальной турбулентной вязкости  $k$  ( $k > 0$ ) решение задачи (1)–(3) может формировать пограничные слои у поверхности и дна водоема, в геофизической гидродинамике их называют экмановскими поверхностным и придонным слоями трения [2; 5]. Для того, чтобы добиться удовлетворительной точности численного решения в слое Экмана, необходимо использовать специальную разностную схему либо механизм адаптации вычислительной сетки, сгущающий ее узлы в области больших градиентов решения. Так, в работе А.В. Щербакова и Б.Ю. Гришнякова [9] рекомендуется применять специальные аппроксимации краевых условий Неймана (2), они построены так, что им удовлетворяют погранслойные функции специального вида. В настоящей работе, применяя простейший вариант ПВИИМ, мы, в рамках единого подхода, аппроксимируем как систему уравнений (1), так и краевые условия (2).

Задачу (1)–(3) удобно рассматривать в комплексной форме, это позволит в дальнейшем, как при построении схемы, так и в процессе численных расчетов, оперировать с ней как с задачей для одного уравнения:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + i\ell\theta - \frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) = f(u, v), \quad 0 < z < H, \quad t > 0; \quad (4)$$

$$\begin{cases} z = 0 : \frac{\partial \theta}{\partial z} = -\frac{\tau}{k}, \\ z = H : \frac{\partial \theta}{\partial z} = -\frac{\tau^b}{k}; \end{cases} \quad t > 0, \quad (5)$$

$$t = 0 : \theta = \theta_0(z), \quad 0 \leq z \leq H. \quad (6)$$

В задаче (4)–(6)  $\theta = u + iv$  – комплексная скорость, кроме того, введены следующие обозначения:

$$f(u, v) = f_1(u, v) + if_2(u, v), \quad \tau = \tau_x + i\tau_y, \quad \tau^b = \tau_x^b + i\tau_y^b, \quad \theta_0(z) = u_0(z) + iv_0(z).$$

Обратимся к аппроксимации уравнения (4) по координате  $z$ , с этой целью рассмотрим произвольную неравномерную сетку  $\{z_j \mid j=1, 2, \dots, n\}$  с шагами  $\Delta z_{j+1/2} = z_{j+1} - z_j$  ( $j=1, 2, \dots, n-1$ ). Для простоты будем считать, что в (4)  $f(u, v) \equiv 0$ , и все данные задачи (4)–(6):  $l, k, \tau, \tau^b$  являются постоянными величинами, обобщение на случай переменных данных осложнений не вызывает. В соответствии с методикой ПВИИМ, уравнение (4) умножим на, пока произвольную, «тестовую» функцию  $\varphi(z)$ , результат проинтегрируем по  $j$ -той сеточной ячейке, в том числе и «по частям»:

$$\int_{z_j}^{z_{j+1}} \varphi \frac{\partial \theta}{\partial t} dz + i\ell \int_{z_j}^{z_{j+1}} \varphi \theta dz - k \left( \varphi \frac{\partial \theta}{\partial z} - \theta \varphi' \right) \Big|_{z_j}^{z_{j+1}} = k \int_{z_j}^{z_{j+1}} \theta \varphi'' dz. \quad (7)$$

Выберем тестовую функцию  $\varphi$  так, чтобы обратить в ноль интеграл в правой части (7), для этого положим:  $\varphi''(z) \equiv 0$ , то есть:

$$\varphi(z) = c_1 z + c_2.$$

Рассмотрим две различные тестовые функции  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ , удовлетворяющие условиям:

$$\varphi_1(z_j) = 1, \quad \varphi_1(z_{j+1}) = 0; \quad \varphi_2(z_j) = 0, \quad \varphi_2(z_{j+1}) = 1.$$

Такие функции легко отыскать:

$$\varphi_1(z) = \frac{z_{j+1} - z}{z_{j+1} - z_j}, \quad \varphi_2(z) = \frac{z - z_j}{z_{j+1} - z_j}.$$

Подставляя  $\varphi = \varphi_1$  в (7), получим:

$$\int_{z_j}^{z_{j+1}} \left[ \frac{z_{j+1} - z}{\Delta z_{j+1/2}} \cdot \left( \frac{\partial \theta}{\partial t} + i\ell \theta \right) \right] dz + k \left( \frac{\partial \theta_j}{\partial z} - \frac{\theta_{j+1} - \theta_j}{\Delta z_{j+1/2}} \right) = 0. \quad (8)$$

Для аппроксимации интеграла в (8) воспользуемся формулой прямоугольников, заменяя значения функции  $\theta$  в сеточной ячейке ее значением на левой границе:

$$\left( \frac{\partial \theta_j}{\partial t} + i\ell \theta_j \right) \frac{\Delta z_{j+1/2}}{2} + k \frac{\partial \theta_j}{\partial z} - k \frac{\theta_{j+1} - \theta_j}{\Delta z_{j+1/2}} = 0. \quad (9)$$

Аналогично, подставляя  $\varphi = \varphi_2$  в (7) и заменяя значения функции  $\theta$  в сеточной ячейке ее значением на правой границе, получаем:

$$\left( \frac{\partial \theta_{j+1}}{\partial t} + i\ell \theta_{j+1} \right) \frac{\Delta z_{j+1/2}}{2} - k \frac{\partial \theta_{j+1}}{\partial z} + k \frac{\theta_{j+1} - \theta_j}{\Delta z_{j+1/2}} = 0. \quad (10)$$

Сложим уравнение (9) с уравнением (10), предварительно заменив в (10) индекс  $j$  на  $j-1$ , тем самым исключим «поток»  $k \frac{\partial \theta_j}{\partial z}$ , в результате получим:

$$\frac{\partial \theta_j}{\partial t} + i\ell \theta_j - \frac{2k}{z_{j+1} - z_{j-1}} \cdot \left( \frac{\theta_{j+1} - \theta_j}{\Delta z_{j+1/2}} - \frac{\theta_j - \theta_{j-1}}{\Delta z_{j-1/2}} \right) = 0, \quad j = 2, 3, \dots, n-1. \quad (11)$$

Система разностных уравнений (11) служит для аппроксимации уравнения (4) во внутренних узлах сетки. Для аппроксимации краевых условий (5) сначала рассмотрим уравнение (9) при  $j=1$  и исключим значение потока на левой границе, используя первое из условий (5), в итоге получим:

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial t} + i\ell \theta_1 - 2k \cdot \frac{\theta_2 - \theta_1}{(z_2 - z_1)^2} = \frac{2\tau}{z_2 - z_1}. \quad (12)$$

Далее, запишем (10) для  $j=n-1$  и исключим значение потока на правой границе, используя второе из условий (5):

$$\frac{\partial \theta_n}{\partial t} + i\ell \theta_n + 2k \cdot \frac{\theta_n - \theta_{n-1}}{(z_n - z_{n-1})^2} = -\frac{2\tau^b}{z_n - z_{n-1}}. \quad (13)$$

Рассмотрим теперь уравнения (11), (12) и (13) совместно: это система обыкновенных дифференциальных уравнений относительно неизвестных функций  $\theta_j(t)$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ ; эту систему можно решать, например, методами Рунге-Кутты. Мы предлагаем простейшую аппроксимацию этой системы при помощи однопараметрического семейства разностных схем [6]:

$$D_t \theta_j + S_t^\sigma \left[ i\ell \theta_j - \frac{2k}{z_{j+1} - z_{j-1}} \cdot \left( \frac{\theta_{j+1} - \theta_j}{\Delta z_{j+1/2}} - \frac{\theta_j - \theta_{j-1}}{\Delta z_{j-1/2}} \right) \right] = 0, \quad j = 2, 3, \dots, n-1; \quad (14)$$

$$D_t \theta_1 + S_t^\sigma \left[ i\ell \theta_1 - 2k \cdot \frac{\theta_2 - \theta_1}{(z_2 - z_1)^2} \right] = \frac{2\tau}{z_2 - z_1}, \quad (15)$$

$$D_t \theta_n + S_t^\sigma \left[ i\ell \theta_n + 2k \cdot \frac{\theta_n - \theta_{n-1}}{(z_n - z_{n-1})^2} \right] = -\frac{2\tau^b}{z_n - z_{n-1}}. \quad (16)$$

Здесь  $D_t \theta = \frac{\theta - \theta^0}{\Delta t}$  – оператор разностного дифференцирования с шагом  $\Delta t$  «по времени»,  $S_t^\sigma \theta = \sigma \cdot \theta + (1 - \sigma) \cdot \theta^0$  – оператор осреднения с параметром  $\sigma \in [0, 1]$ . Система уравнений (14)–(16) может быть записана в следующей, «канонической» форме:

$$\left\{ \begin{array}{l} B_1 \theta_1 - C_1 \theta_2 = B_1^0 \theta_1^0 + C_1^0 \theta_2^0 + F_1, \\ -A_j \theta_{j-1} + B_j \theta_j - C_j \theta_{j+1} = A_j^0 \theta_{j-1}^0 + B_j^0 \theta_j^0 + C_j^0 \theta_{j+1}^0 + F_j, \quad j = 2, 3, \dots, n-1; \\ -A_n \theta_{n-1} + B_n \theta_n = A_n^0 \theta_{n-1}^0 + B_n^0 \theta_n^0 + F_n. \end{array} \right. \quad (17)$$

В (17):

$$C_1 = \frac{2k\sigma}{(z_2 - z_1)^2}, \quad B_1 = \frac{1}{\Delta t} + C_1 + i\ell\sigma, \quad A_n = \frac{2k\sigma}{(z_n - z_{n-1})^2}, \quad B_n = \frac{1}{\Delta t} + A_n + i\ell\sigma, \quad (18)$$

$$A_j = \frac{2k\sigma}{(z_{j+1} - z_{j-1})(z_j - z_{j-1})}, \quad C_j = \frac{2k\sigma}{(z_{j+1} - z_{j-1})(z_{j+1} - z_j)},$$

$$B_j = \frac{1}{\Delta t} + A_j + C_j + i\ell\sigma, \quad j = 2, 3, \dots, n-1; \quad (19)$$

$$C_1^0 = \frac{2k(1-\sigma)}{(z_2 - z_1)^2}, \quad B_1^0 = \frac{1}{\Delta t} - C_1^0 - i\ell(1-\sigma),$$

$$A_n^0 = \frac{2k(1-\sigma)}{(z_n - z_{n-1})^2}, \quad B_n^0 = \frac{1}{\Delta t} - A_n^0 - i\ell(1-\sigma),$$

$$A_j^0 = \frac{2k(1-\sigma)}{(z_{j+1} - z_{j-1})(z_j - z_{j-1})}, \quad C_j^0 = \frac{2k(1-\sigma)}{(z_{j+1} - z_{j-1})(z_{j+1} - z_j)},$$

$$B_j^0 = \frac{1}{\Delta t} - A_j^0 - C_j^0 - i\ell(1-\sigma), \quad j = 2, 3, \dots, n-1;$$

$$F_1 = \frac{2\tau}{z_2 - z_1}, \quad F_j = 0, \quad j = 2, 3, \dots, n-1; \quad F_n = -\frac{2\tau^b}{z_n - z_{n-1}}.$$

Система уравнений (17) решается методом прогонки [7], которая используется в комплексной форме:

$$\alpha_1 = \frac{C_1}{B_1}, \quad \beta_1 = \frac{F_1}{B_1}, \quad \alpha_j = \frac{C_j}{B_j - \alpha_{j-1}A_j}, \quad \beta_j = \frac{F_j + \beta_{j-1}A_j}{B_j - \alpha_{j-1}A_j}, \quad j = 2, 3, \dots, n-1; \quad (20)$$

$$u_n = \frac{F_n + \beta_{n-1}A_n}{B_n - \alpha_{n-1}A_n}, \quad u_j = \alpha_j u_{j+1} + \beta_j, \quad j = n-1, n-2, \dots, 1. \quad (21)$$

Докажем, что прогонка (20), (21) для решения задачи (17) *корректна и устойчива*, что, в соответствии с [7], означает выполнение условий:

$$B_1 \neq 0, \quad B_j - \alpha_{j-1}A_j \neq 0, \quad j = 2, 3, \dots, n; \quad |\alpha_j| \leq 1, \quad j = 1, 2, \dots, n-1. \quad (22)$$

Доказательство проведем индукцией по индексу  $j$ . База индукции:

$$|B_1| \geq \frac{1}{\Delta t} + C_1 > 0, \quad |\alpha_1| \leq \frac{C_1 \Delta t}{1 + C_1 \Delta t} < 1,$$

является следствием (18) и (20). Пусть, в рамках индукционного предположения, выполнены неравенства:

$$|\alpha_m| \leq 1, \quad B_m - \alpha_{m-1}A_m \neq 0 \quad \text{при} \quad m \leq j-1.$$

Тогда, в силу (19) и (20):

$$|B_j - \alpha_{j-1}A_j| \geq |B_j| - |\alpha_{j-1}| |A_j| \geq \frac{1}{\Delta t} + C_j + (1 - |\alpha_{j-1}|) |A_j| \geq \frac{1}{\Delta t} + C_j > 0;$$

$$|\alpha_j| \leq \frac{C_j}{|B_j - \alpha_{j-1}A_j|} \leq \frac{C_j \Delta t}{1 + C_j \Delta t} < 1, \quad \text{что и доказывает (22).}$$

Приведем результаты численных экспериментов с разностной схемой (14)–(16), с этой целью рассмотрим семейство функций:

$$\theta(z, t) = (c_1 e^{\lambda z} + c_2 e^{-\lambda z}) \cdot e^{(k\lambda^2 - i\ell)t}, \quad (23)$$

которые, при произвольных комплексных значениях  $\lambda$ ,  $c_1$ ,  $c_2$ , являются решениями однородного уравнения (4) с постоянными коэффициентами. Основываясь на (23), рассмотрим следующий класс решений задачи (4)–(6):

$$\theta(z, t) = (c_1 e^{\lambda z} + c_2 e^{-\lambda z}) + \varphi e^{-i\ell t}, \quad (24)$$

$$\lambda = (1+i) \sqrt{\frac{\ell}{2k}}, \quad c_1 = \frac{1}{k\lambda} \cdot \frac{\tau e^{-\lambda H} - \tau^b}{e^{\lambda H} - e^{-\lambda H}}, \quad c_2 = \frac{1}{k\lambda} \cdot \frac{\tau e^{\lambda H} - \tau^b}{e^{\lambda H} - e^{-\lambda H}},$$

$$\theta_0(z) = (c_1 e^{\lambda z} + c_2 e^{-\lambda z}) + \varphi.$$

Его мы использовали для тестирования семейства разностных схем (14)–(16). Приложение для численных экспериментов написано на языке C# в среде Microsoft Visual Studio 2008. Расчеты проведены при следующих значениях параметров:

$$T = 10, \quad H = 10, \quad \varphi = 10, \quad \tau = 8, \quad \tau^b = 12, \quad \sigma = 0,5, \quad \Delta t = 0,1.$$

Варьировались величины коэффициента  $k$  – вертикальной турбулентной вязкости и  $n$  – числа узлов пространственной сетки. На рисунке 1 представлены графики точных (24) и приближенных (расчитанных при помощи схемы (14)–(16)) решений  $u(z, t)$  (нижние кривые) и  $v(z, t)$  (верхние кривые) задачи (1)–(3) в момент времени  $t = T$  при значениях  $k = 5, n = 20$ ; значения приближенных решений в узлах сетки отмечены крестиками. Рисунок иллюстрирует довольно высокую точность метода при небольшом числе узлов сетки: относительные погрешности при вычислении функций  $u(z, t)$  и  $v(z, t)$  в этом случае равны 0,9% и 1,2%, соответственно.

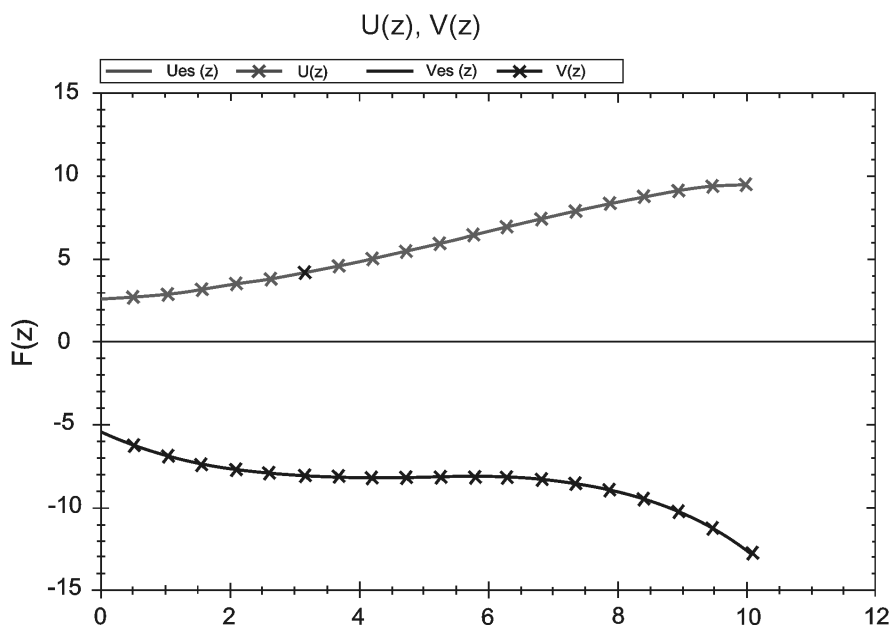
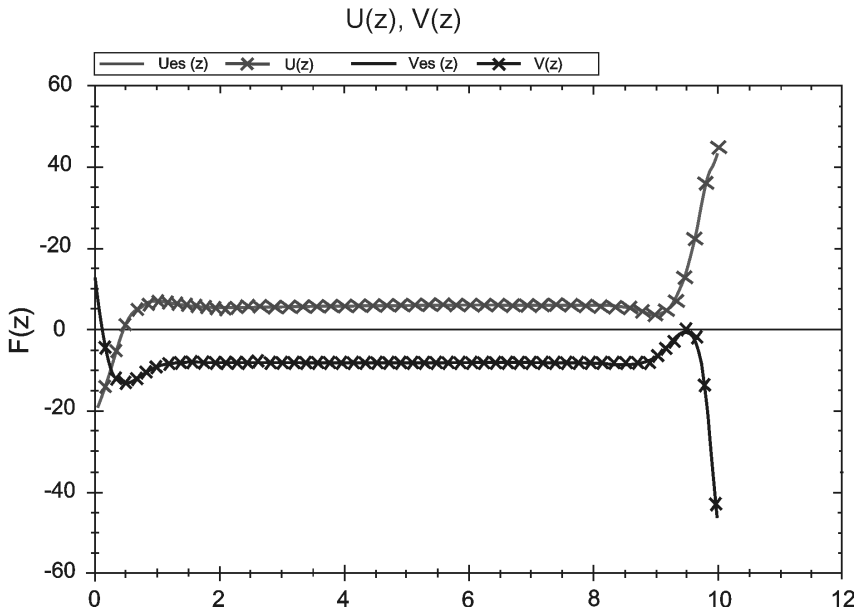
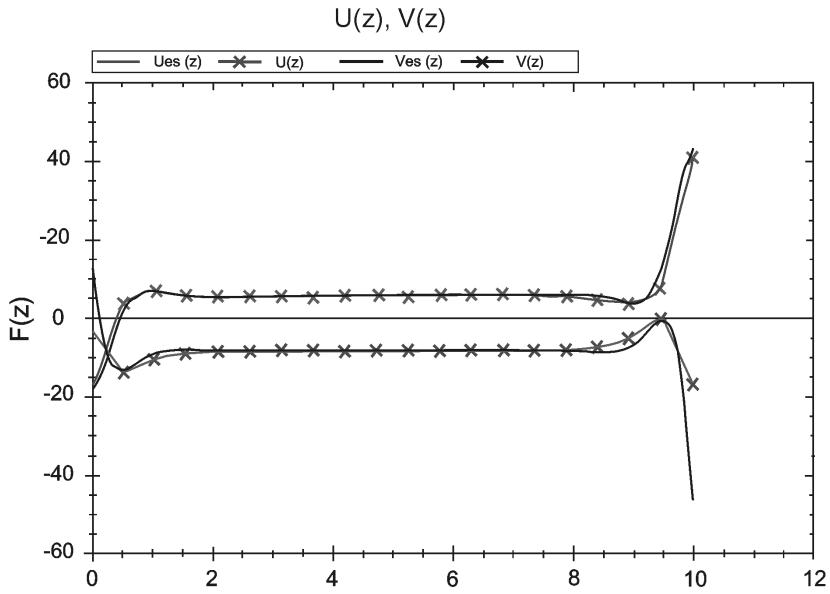


Рис. 1. ( $k = 5, n = 20$ )

На рисунке 2 представлен тот же самый расчет, но при меньшем значении коэффициента вертикальной турбулентной вязкости  $k = 0,05$ ; в решениях проявились пограничные слои, которые недостаточно эффективно описываются численным методом: относительные погрешности в этом случае составили 46% и 7,7% для функций  $u(z, t)$  и  $v(z, t)$  соответственно. Рисунок 3 иллюстрирует расчет, в котором число узлов сетки увеличено до  $n = 60$  без изменения остальных параметров задачи и схемы: относительные погрешности уменьшились до 5,3% и 3,3% соответственно, что свидетельствует о сходимости метода.

Проведенный теоретический анализ схемы и результаты численных экспериментов позволяют сделать следующие выводы. Семейство разностных схем (14)–(16) может быть использовано для решения задачи (4)–(6) при произвольных значениях параметров этой задачи и любых пространственных шагах вычислительной сетки: на каждом временном слое гарантируется однозначная разрешимость соответствующей сеточной задачи. Требуется дополнительное изучение влияния на сходимость схемы выбора шага по времени.





Предложенную схему целесообразно использовать в случаях, когда отсутствуют ограничения на величину пространственных сеточных массивов. Если же такие ограничения есть и при этом в задаче формируются экмановские пограничные слои, то схема (14)–(16) оказывается не достаточно эффективной и требует модификации. Эта модификация, на наш взгляд, может быть произведена в рамках использовавшегося метода ПВИИМ путем специального выбора тестовых функций.

### ***Литература***

1. *Еремеев В.Н., Кочергин В.П., Кочергин С.В., Скляр С.Н.* Математическое моделирование гидродинамики глубоководных бассейнов. – Севастополь: ЭКОСИ-Гидрофизика, 2001. – 238 с.
2. *Каменкович В.М.* Основы динамики океана. – Ленинград: Гидрометеоздат, 1973. – 240 с.
3. *Кочергин В.П.* Теория и методы расчета океанических течений. – Москва: Наука, 1978. – 128 с.
4. *Марчуж Г.И., Саркисян А.С.* Математическое моделирование циркуляции океана. – Москва: Наука, 1988. – 302 с.
5. *Педлоски Дж.* Геофизическая гидродинамика. – Москва: Мир, 1984. –Т. 1. – 398 с.
6. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. – Москва: Наука, 1983. – 616 с.
7. *Самарский А.А., Николаев Е.С.* Методы решения сеточных уравнений. – Москва: Наука, 1978. – 592 с.
8. *Скляр С.Н.* О дискретизации задач с пограничным слоем при помощи одного проекционного варианта метода интегральных тождеств. I. Несамосопряженное уравнение, первая краевая задача//Изв. АН Киргизской ССР. Физ.-техн. и матем. науки. – 1988. – № 4. – С. 10–23; II. Несамосопряженное уравнение, третья краевая задача//Там же, – 1989. – № 1. – С. 3–10; III. Самосопряженное уравнение//Там же, – 1989. – № 4. – С. 3–11.
9. *Щербаков А.В., Гришняков Б.Ю.* О разностных схемах для численного решения задачи Экмана//Численное моделирование динамики океана и внутренних водоемов. – Новосибирск, 1984. – С. 156–172.