Мугалим окутуу ыкмаларын жана усулдарын колдонуу менен өзүнүн тил үйрөтүүү жөндөмүн да өнүктүрүүгө тийиш. Тажрыйбалуу, чыгармачыл мугалим көздөгөн максатына жетүү үчүн убакытты сарамжалдуу пайдаланып, эмнелерди үйрөтүү зарыл экендигине, кыргыз тилин бөтөн тил катары өздөштүрүүгө кайсы ыкмалар менен усулдарды кантип колдонуу керектигине көңүл бурат. Ал окутуунун сапатын жогорулатууда окуучулардын өзгөчүлүктөрүн, тил үйрөтүүнүн баскычтарын, деңгээлдерин эске алып, сабакты туура уюштуруп, окутуунун жаңы технологияларын колдонот. Окучуунун кептик билгичтерин туура аныктап, калыс баалоого аракет кылат.

Адабияттар

1. *Валькова И.П.* и др. Как развивать критическое мышление // Валькова И. П., Низовская И. А., Задорожная Н. П., Буйских Т. М. – Бишкек, 2005. – С. 80–84.
2. *Гузеев В.В.* Образовательная технология: от приема до философии. – М.: Сентябрь, 1996.
3. *Загашев И.* Умение задавать вопросы // Перемена. – 2001. – №4. – С. 8–13.
4. *Карнеги Д.* Как завоевывать друзей и оказывать влияние на людей. – Бишкек: ПРОГРЕСС, 1991.
5. *Кларин М.В.* Педагогическая технология в учебном процессе. Анализ зарубежного опыта. – М.: Знание. – 1989.
6. *Маслова Д.* «Неуд» по кыргызскому» // Вечерний Бишкек. – 2007, 18 май. – С. 3
7. *Низовская И.А.* Сынчыл ойломду өстүрө турган окуу жана жазуу программасынын сөздүгү. – Бишкек, 2003 ж.

С.К. Кыдыралиев,
к.ф.-м.н., доцент, и.о. профессора направления
«Математика и естественные науки»,
Американский университет в Центральной Азии

Задачи на рост ВВП, ценообразование и другие приложения разностных уравнений в экономике

Еще Гомер говорил, что «глупец познает только то, что свершилось» (1). Ему вторил древнеримский писатель Теренций (ок. 195 – ок. 159 гг. до н.э.): «*Быть мудрым – значит* видеть не только *то, что под ногами, но и предвидеть будущее*» (1).

Для того чтобы понять, что происходило и происходит, а также предвидеть будущее в экономике, нужно использовать модели, важнейшими из которых являются динамические модели.

В данной работе будут представлены дискретные модели, описываемые линейными разностными уравнениями 1-го порядка. По нашему мнению, дискретные модели, по сравнению с непрерывными моделями, являются более наглядными и, соответственно, более доступными для использования и изучения.

Относительная простота имеет большое значение в учебном процессе. Чем больше студентов овладеет элементами математического моделирования экономики, тем меньше вероятность того, что ученые будут выступать в роли Кассандры, которую никто не слушал.

К сожалению, приходится констатировать, что значительная часть студентов нейтрально или негативно относится к математике, считая ее слишком сложной и абстрактной наукой. Как можно изменить ситуацию? По-видимому, необходимо изменить содержательную часть курсов и методику их преподавания. Надеемся, что материал, предлагаемый в данной статье, поможет в решении этой задачи.

1. Линейным разностным уравнением 1-го порядка называется уравнение

$$x_n - ax_{n-1} = b_n, \qquad (1)$$

где x_n – значение исследуемой величины в n-ный период; a и b_n являются коэффициентами уравнения.

Решением уравнения (1) называется формула, которая позволяет напрямую связать значения x_n и x_0.

Для того чтобы получить решение, разделим уравнение (1) на a^n:

$$a^{-n} x_n - a^{-(n-1)} x_{n-1} = b_n a^{-n}.$$

и обозначив $a^{-\kappa} x_\kappa$ через z_κ получим, что уравнение (1) можно записать в виде

$$z_n - z_{n-1} = b_n a^{-n}. \qquad (2)$$

Так как

$$z_n - z_0 = (z_n - z_{n-1}) + (z_{n-1} - z_{n-2}) + ... + (z_2 - z_1) + (z_1 - z_0),$$

в силу уравнения (2), получаем

$$z_n - z_0 = b_n a^{-n} + b_{n-1} a^{-n+1} + ... + b_1 a^{-1}. \qquad (3)$$

Вернувшись к исходным обозначениям и умножив равенство (3) на a^n, получим искомую формулу:

$$x_n = x_0 a^n + b_n + b_{n-1} a + ... + b_1 a^{n-1} = x_0 a^n + \sum_{k=1}^{n} b_k a^{n-k}. \qquad (4)$$

Повторив выкладки, нетрудно увидеть, что формула (4) примет вид

$$x_n = x_0 a^n + \sum_{k=1}^{n} b_k^1 a^{n-k} + \ldots + \sum_{k=1}^{n} b_k^m a^{n-k}, \qquad (5)$$

если коэффициент b_k есть сумма нескольких слагаемых: $b_k = b_k^1 + \ldots + b_k^m$.

Выражение $x_0 a^n$ называется общим решением однородного уравнения $x_n - ax_{n-1} = 0$, а остальные слагаемые есть частные решения уравнений с соответствующими правыми частями.

В частности, если:

a) $b_k = b$, то $\sum_{k=1}^{n} b_k a^{n-k} = b\sum_{k=1}^{n} a^{n-k} = b\dfrac{1-a^n}{1-a}$; (5a)

b) $b_k = hc^{k-1}$, то

$$\sum_{k=1}^{n} b_k a^{n-k} = h\sum_{k=1}^{n} c^{k-1}a^{n-k} = \frac{h}{c}a^n\sum_{k=1}^{n}\frac{c^k}{a^k} = \frac{h}{c}a^n\frac{c}{a}\frac{1-c^n/a^n}{1-c/a} = h\frac{a^n-c^n}{a-c}; \quad (5b)$$

c) $b_k = ga^{k-1}$, то $\sum_{k=1}^{n} b_k a^{n-k} = g\sum_{k=1}^{n} a^{k-1}a^{n-k} = gna^{n-1}$. (5c)

d) $b_k = f(k-1)$, то

$$\sum_{k=1}^{n} b_k a^{n-k} = f\sum_{k=1}^{n}(k-1)a^{n-k} = f\frac{a^n - na + (n-1)}{(1-a)^2}. \quad (5d)$$

Стоит отметить, что при получении формул (5a)–(5b) используется формула для нахождения суммы членов геометрической прогрессии.

Для того чтобы вывести формулу (5d), воспользуемся формулой для нахождения суммы членов квазигеометрической прогрессии

$$1 + 2x + 3x^2 + ... + (k-1)x^{k-2} + kx^{k-1} = \frac{1-(k+1)x^k + kx^{k+1}}{(1-x)^2}, \quad (6)$$

доказательство которой приведено далее.

Так как в случае (5d) $b_k = f(k-1)$, то

$$\sum_{k=1}^{n} b_k a^{n-k} = f\sum_{k=1}^{n}(k-1)a^{n-k} = fa^{n-2}\sum_{k=1}^{n}(k-1)\left(\frac{1}{a}\right)^{k-2} = \text{(в силу (6))} =$$

$$= fa^{n-2}\frac{1-n(1/a)^{n-1}+(n-1)(1/a)^n}{(1-(1/a))^2} = fa^{n-2}\frac{(1/a)^n(a^n - na + (n-1))}{(1/a)^2(a-1)^2} =$$

$$= \text{(и отсюда получается требуемое)} = f\frac{a^n - na + (n-1)}{(1-a)^2}.$$

Доказательство формулы (6) можно получить из формулы для нахождения суммы членов геометрической прогрессии

$$1 + x + x^2 + ... + x^{n-2} + x^{n-1} + x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}. \quad (7)$$

Продифференцируем равенство (7).

Производная левой части равенства (7) есть левая часть (6).

В то же время и производная от правой части (7) равна правой части (6):

$$\left(\frac{1-x^{n+1}}{1-x}\right)' = \frac{\left(1-x^{n+1}\right)'\left(1-x\right)-\left(1-x\right)'\left(1-x^{n+1}\right)}{\left(1-x\right)^2} =$$

$$= \frac{-\left(n+1\right)x^n\left(1-x\right)-\left(-1\right)\left(1-x^{n+1}\right)}{\left(1-x\right)^2} = \frac{-nx^n - x^n + nx^{n+1} + x^{n+1} + 1 - x^{n+1}}{\left(1-x\right)^2} =$$

$$= \frac{1+nx^{n+1}-(n+1)x^n}{\left(1-x\right)^2} .$$

Что и требовалось доказать.

2. Популярная экономическая модель предполагает, что валовой внутренний продукт (ВВП) страны *(Y)* в каждом периоде есть сумма инвестиций *(I)*, потребления *(C)*, госрасходов *(G)* и чистого экспорта *(NX)* :

$$Y_n = I_n + C_n + G_n + NX_n, \qquad (8)$$

а потребление есть функция от ВВП прошлого периода: $C_n = mY_{n-1} + a$.

Коэффициент m называется предельной склонностью к потреблению, a – величиной автономного потребления.

Спрогнозируем величину ВВП Наталенда через 5 лет, предполагая, что в начальный момент времени ВВП Наталенда равен 1200, предельная склонность к потреблению 0,8, величина автономного потребления 250.

В 1-й год величина инвестиций равна 50, госрасходов –20, чистого экспорта – 10 денежным единицам. Ожидается, что ежегодно госрасходы будут возрастать на 5%, а чистый экспорт убывать на 2 единицы.

Подставив данные задачи в уравнение (8)

$$Y_n = 50 + 0{,}8Y_{n-1} + 250 + 20(1{,}05)^{n-1} + 10 - 2(n-1)$$

и приведя подобные члены, получим разностное уравнение

$$Y_n = 0{,}8Y_{n-1} + 310 + 20(1{,}05)^{n-1} - 2(n-1) \qquad (9)$$

с начальным условием $Y_0 = 1200$.

Согласно формуле (5), решение уравнения (9) имеет вид:

$$Y_n = 1200(0{,}8)^n + 310\frac{1-\left(0{,}8\right)^n}{1-0{,}8} + 20\frac{\left(1{,}05\right)^n-\left(0{,}8\right)^n}{1{,}05-0{,}8} - 2\frac{\left(0{,}8\right)^n-0{,}8n+\left(n-1\right)}{\left(1-0{,}8\right)^2} .$$

Первое слагаемое в правой части определяется начальным условием, 2-ое – формулой (5а), 3-ье – формулой (5b), 4-ое - формулой (5d).

Проведя соответствующие алгебраические преобразования, получим, что изменение ВВП Наталенда описывается функцией

$$Y_n = -480\,(0{,}8)^n + 80\,(1{,}05)^n + 1600 - 10n. \qquad (10)$$

В частности, при $n = 5$ ВВП Наталенда равен

$$Y_5 = -480\,(0{,}8)^5 + 80\,(1{,}05)^5 + 1600 - 50 = 1495.$$

3. Следующая модель описывает процесс ценообразования при дуополии, то есть на рынке с двумя фирмами. При этом предполагается, что есть лидирующая фирма – фирма, самостоятельно устанавливающая цены, и ведомая фирма – фирма, устанавливающая цену на свой товар ориентируясь на цены фирмы лидера.

Назгуль и Бегимай продают похожий товар и в каждом периоде устанавливают цены на свой товар, опираясь на цены прошлого периода следующим образом: Назгуль берет 80% своей цены и добавляет \$20 в 1-м периоде, а в каждом последующем периоде на \$2 больше.

Бегимай берет 30% цены Назгуль, 75% своей цены и отнимает от суммы \$10 в 1-м периоде, а в каждом последующем периоде отнимает на 25% меньше.

Зная, что в начальный момент времени цена у Назгуль \$120, у Бегимай \$130, проследим динамику изменения цен.

Пусть x_n – это цена товара Назгуль, а y_n – цена товара Бегимай в периоде с номером n. Тогда имеет место система уравнений с соответствующими начальными условиями:

$$\begin{cases} x_n = 0,8x_{n-1} + 20 + 2(n-1), & x_0 = 120, \\ y_n = 0,3x_{n-1} + 0,75y_{n-1} - 10(0,75)^{n-1}, & y_0 = 130. \end{cases} \qquad (11)$$

Из 1-го уравнения системы (11), воспользовавшись формулой (5) (с подслучаями (5a) и (5d)), получим функцию, описывающую изменение цены товара Назгуль:

$$x_n = (0,8)^n \cdot 120 + 20\frac{1-(0,8)^n}{1-0,8} + 2\frac{(0,8)^n - 0,8n + (n-1)}{(1-0,8)^2} = (0,8)^n \cdot 70 + 50 + 10n$$

Подставив значение x_n во 2-ое уравнение системы (11), получим уравнение

$$y_n = 0{,}75y_{n-1} + 21(0{,}8)^{n-1} + 15 + 3(n-1) - 10(0{,}75)^{n-1}.$$

Это уравнение также является линейным разностным уравнением 1-го порядка. Поэтому его решение, описывающее изменение цены товара Бегимай, получаем из формулы (5) и его подслучаев:

$$y_n = (0,75)^n \cdot 130 - 10n(0,75)^{n-1} +$$

$$+15\frac{1-(0,75)^n}{1-0,75} + 21\frac{(0,8)^n - (0,75)^n}{0,8-0,75} + 3\frac{(0,75)^n - 0,75n + (n-1)}{(1-0,75)^2} =$$

$$= -302(0{,}75)^n + 420(0{,}8)^n + 12 + 12n - 10n(0{,}75)^{n-1}.$$

4. С моделями, описанными в пунктах 2 и 3, можно соглашаться, а можно и не соглашаться, ставя под сомнение гипотезы, лежащие в их основе. Подобных проблем не возникает при рассмотрении следующей ситуации.

Жаркынай имела на счете $1000 в начале 2001 года. В конце 2001 года она положила на счет $100, в конце 2002 года сняла $200 и так далее, вкладывая в конце каждого нечетного года $100 и в конце каждого четного года снимая $200. Сколько денег будет на ее счете в начале 2015 года? Ставка интереса 10%.

Для того чтобы решить эту задачу, можно представить себе 2 счета: A и B.

На счете A имеется $1000, и в конце каждого последующего периода длиной 2 года с него 7 раз снимают $200.

На счете B с начала денег нет, в конце 2001 года на него вкладывают $100 и в конце каждого последующего периода длиной 2 года на него еще 6 раз вкладывают $100. При этом к моменту подсчета денег со времени последнего вклада на счет B проходит 1 год.

Тогда, если x_n – это количество денег на счете A в конце периода с номером n, а y_n – количество денег на счете A в конце периода с номером n, то имеют место уравнения

$$x_n = (1 + 0{,}10)^2 x_{n-1} - 200 \qquad \text{и} \qquad y_n = (1 + 0{,}10)^2 y_{n-1} + 100$$

с начальными условиями $x_0 = 1000$ и $y_0 = 0$.

Из (5a) следует, что решение 1-го уравнения есть функция

$$x_n = (1+0{,}21)^n \cdot 1000 - 200\frac{1-(1{,}21)^n}{1-1{,}21},$$

а 2-го

$$y_n = (1+0{,}21)^n \cdot 0 + 100\frac{1-(1{,}21)^n}{1-1{,}21}.$$

Следовательно, в начале 2015 года на счете у Жаркынай будет

$$x_7 + y_n(1 + 0{,}10) = 1133 + 1465 = \$2598.$$

Другое, более изящное решение этой задачи предложено моей студенткой Байдолотовой Жаркынай. Она увидела, что условия задачи на математическом языке можно записать через разностное уравнение

$$z_n = (1 + 0{,}10)z_{n-1} - 50 + 150(-1)^{n-1}$$

и начальное условие $z_0 = 1000$.

По (5b), решение уравнения запишется в виде

$$z_n = (1+0{,}10)^n \cdot 1000 - 50\frac{1-(1{,}1)^n}{1-1{,}1} + 150\frac{(-1)^n-(1{,}1)^n}{(-1)-1{,}1}.$$

Поэтому, в начале 2015 года на счете будет z_{14} = $2598.

Предложенный метод решения можно обобщить.:

В нулевом периоде на счете z_0 денег. В конце 1-го года на счет кладут $A, в конце 2 года $B и так далее, вкладывая $A в конце каждого нечетного года и $B в конце каждого четного года. Сколько денег будет на счете после вклада с номером N? Ставка интереса r.

Решение получается, если условия задачи записать через разностное уравнение

$$z_n = (1+r)z_{n-1} + (A+B)/2 + (-1)^{n-1}(A-B)/2\,.$$

Литература

1. Афоризмы. Древний мир. Античность / Сост. Кондрашов А.П. – М.: РИПОЛ КЛАССИК, 2000. – 512 с.
2. *Кыдыралиев С.К.* Финансовые и инвестиционные расчеты. – Бишкек: АУЦА, 2007. – 200 с.

E.T. Musuralieva,
Candidate of mathematical sciences, Professor,
Mathematics and Natural Sciences Department,
American University of Central Asia

From My Experience of Teaching Mathematics

During few last years, the AUCA has developed a greater diversity in the students' enrollment and a new curricula, which introduced additional mathematical courses. Students from more than twenty countries with different backgrounds and levels in mathematics are enrolling in mathematics in greater numbers that in the past. This paper is raising the issue of how to make mathematics more exciting and enjoyable and what are the challenges in teaching mathematics; how to encourage students for effective participation in math classes in spite of their prior experience. This paper will highlight in brief the various aspects of communications and pedagogy; the way of teaching mathematics based on my experience with several tasks which I offer to the students in my class. It is clear to those of us who meet such a kind of material that is done with an intention to help our students to see both that the mathematics is a useful tool and a fine mental discipline, as well as that a hard work can be prepared in a fun and interesting way. With the purpose to increase mathematical knowledge of students, many standard textbooks have been published in different languages. There are many diverse educational systems, methodological and technical approaches to present information. The AUCA faculty members have the access to the Internet in order to prepare lectures and make them more attractive and diverse. The question is how a faculty should present mathematical manipulation and theoretical material without losing students or creating an aversion to the subject.