ритории, что позволит в конечном итоге в разработке программы устойчивого развития и рационального природопользования.

Литература

1. *Азыкова Э.К.* Природно-антропогенные геосистемы// «Горы Кыргызстана». – Бишкек.: Технология, 2001.
2. *Айтматов И.Т., Торгоев И.А., Алёшин Ю.Г.* Геоэкологические проблемы в горнопромышленном комплексе Кыргызстана// Наука и новые технологии. – 1997. – № 1. – С. 129–137.
3. *Джамгырчиев Д.Ч.* Устойчивое экологическое развитие Кыргызстана на основе использования ландшафтно-ресурсного потенциала территории. – Бишкек, 2007. – С. 49–52.
4. *Каваляускас П.* Вопросы теории природного каркаса // Научные труды высших учебных заведений Литовской ССР. География. – 199О. – № 2. – С. 93–109.
5. *Мягков С.М.* Возможные изменения природы Центрального Тянь-Шаня к 2025 году// Вестник МГУ. Сер. «География». – 1981. – № 5.
6. *Николаев В.А.* Основы учения об агроландшафтах //Агроландшафтные исследования: методология, методика, региональные проблемы. – М.: Изд-во МГУ, 1992. – С. 3–57.
7. *Реймерс Н.Ф.* Природопользование: словарь-справочник. –М., 1990.
8. Словарь иностранных слов. – М., Русский язык, 1989.
9. *Яцухно В.М., Мандер Ю.Э.* Формирование агроландшафтов и охрана окружающей среды. – Минск: Институт геологических наук АНБ, 1995. – 122 с.

С.К. Кыдыралиев,
к.ф.-м.н., доцент, и.о.профессора направления «Естественные науки и информационные технологии», Американский университет в Центральной Азии

А.Б. Урдалетова,
к.ф.-м.н., доцент, профессор кафедры «Менеджмент», Кыргызско-Турецкий университет «Манас»

Единый взгляд на уравнения Эйлера, Лагранжа и Чебышева

В работах [1, 2] рассматривалось линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1} y' + p_n y = f(x), \qquad (1)$$

где $p_1, p_2, \ldots, p_n$ – постоянные коэффициенты, $f(x)$ – заданная функция.

Было доказано, что для решения уравнения (1) достаточно разложить его в цепочку (последовательность) линейных дифференциальных уравнений 1-го порядка:

$$z_1' - k_1 z_1 = f(x),$$

$$z_2' - k_2 z_2 = z_1,$$

....

$$z'_{n-1} - k_{n-1}z_{n-1} = z_{n-2},$$

$$y' - k_n y = z_{n-1},$$

где $k_1, k_2, ..., k_n$ являются корнями характеристического уравнения

$$k^n + p_1 k^{n-1} + ... + p_{n-1}k + p_n = 0.$$

В предлагаемой Вашему вниманию работе подобные результаты получены для: уравнения Эйлера

$$x^2 y'' + axy' + by = f(x); \tag{2}$$

уравнения Лагранжа

$$x^2 y'' + axy' + by = f(x); \tag{3}$$

уравнения Чебышева

$$(1-x^2)y'' - xy' + r^2 y = 0, \tag{4}$$

где a, b, l, m, r – постоянные числа.

В работе показано, что уравнения (2) – (4) являются частными случаями одного, интегрируемого в квадратурах, класса линейных дифференциальных уравнений.

При этом рассматривались только уравнения 2-го порядка, но следует отметить, что для уравнений Эйлера и Лагранжа распространение результатов на более высокие порядки не представляет особых сложностей.

В данной работе, говоря о разрешимости или интегрируемости в квадратурах, мы имеем в виду ситуацию, в которой решение дифференциального уравнения можно записать в виде интеграла от некоторой функции.

1. Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

Рассмотрим уравнение 2-го порядка, соответствующее уравнению (1)

$$y'' + ay' + by = f(x). \tag{1.1}$$

Его можно представить в виде цепочки линейных дифференциальных уравнений 1-го порядка

$$z' - pz = f(x), \tag{1.2}$$

$$y' - qy = z, \tag{1.3}$$

где
$$\begin{cases} p + q = -a, \\ p \cdot q = b. \end{cases}$$

В справедливости утверждения легко убедиться, подставив значение z из (1.3) в (1.2).

Пример 1.

Для того чтобы проинтегрировать уравнение

$$y'' - 6y' + 9y = e^{3x} / \sqrt{x},$$

разложим его в цепочку

$$z' - 3z = e^{3x} / \sqrt{x}, \tag{1.4}$$

$$y' - 3y = z. \tag{1.5}$$

Решением уравнения (1.4) является функция $z = \left(2\sqrt{x} + C\right)e^{3x}$.

Подставим полученную функцию в правую часть уравнения (1.5) и, проинтегрировав, получим $y = \left(\frac{4}{3}x^{3/2} + Cx + C_1\right)e^{3x}$.

Для того чтобы увидеть разницу между предлагаемым методом и традиционными, рекомендуем решить уравнение традиционным способом.

2. Уравнение Эйлера

Для того чтобы проинтегрировать уравнение Эйлера

$$x^2 y'' + axy' + by = f(x) \tag{2.1}$$

достаточно представить его в виде в виде цепочки линейных дифференциальных уравнений 1-го порядка

$$xz' - pz = f(x), \tag{2.2}$$

$$xy' - qy = z. \tag{2.3}$$

Для определения значений коэффициентов p и q подставим выражение для z из уравнения (2.3) в (2.2). Тогда

$$x\left(xy' - qy\right)' - p(xy' - qy) = f(x).$$

Раскроем скобки и, приведя подобные члены, получим

$$x^2 y'' + \left(1 - p - q\right)xy' + pqy = f(x). \tag{2.4}$$

Из (2.1) и (2.2) следует, что $\begin{cases} p + q = 1 - a, \\ p \cdot q = b. \end{cases}$ (2.5)

<u>Пример 2.</u>

Для того чтобы проинтегрировать уравнение

$$x^2 y'' + 13xy' + 32y = 16e^{x^4}, \tag{2.6}$$

решим алгебраическую систему $\begin{cases} p + q = 1 - a, \\ p \quad q = b. \end{cases}$ и, воспользовавшись решением, разложим (2.6) в цепочку

$$xz' + 4z = 16e^{x^4}, \tag{2.7}$$

$$xy' + 8y = z. \tag{2.8}$$

Решение уравнения (2.7) – функция $z = \left(4e^{x^4} + C\right)/x^4$.

Подставим полученную функцию в правую часть уравнения (2.8) и, проинтегрировав, получим $y = \left(e^{x^4} + C_1x^4 + C_2\right)/x^8$.

3. Общая ситуация

Успехи, достигнутые в пунктах 1 и 2, способны подвигнуть нас к рассмотрению общей ситуации: рассмотреть уравнение

$$g^2(x)y'' + a(x)g(x)y' + b(x)y = f(x), \tag{3.1}$$

где *a(x), b(x), g(x)* – некоторые функции, дифференцируемые достаточное количество раз.

Представим (3.1) в виде цепочки линейных дифференциальных уравнений 1-го порядка

$$g(x)\,z' - p(x)z = f(x), \tag{3.2}$$

$$g(x)\,y' - q(x)y = z. \tag{3.3}$$

Подставив выражение для *z* из (3.3) в (3.2), получим

$$g(x)\left(g(x)y'' + g'(x)y' - q'(x)y - q(x)y'\right) - p(x)\left(g(x)y' - q(x)y\right)z = f(x).$$

Соберем подобные члены

$$g^2(x)y'' + g(x)\left(g'(x) - p(x) - q(x)\right)y' + \left(p(x)q(x) - q'(x)g(x)\right)y = f(x)$$

и, приравняв коэффициенты при одинаковых производных *y*, получим

$$\begin{cases} g'(x) - p(x) - q(x) = a(x), \\ p(x)\cdot q(x) - q'(x)g(x) = b(x). \end{cases} \tag{3.4}$$

Теперь выразим функцию *p(x)* из 2-го уравнения системы и, подставив в 1-ое, получим, что для того чтобы определить функцию *q(x)* и, соответственно, *p(x)* через коэффициенты уравнения (3.1), необходимо решить уравнение

$$q'(x)g(x) + q(x)[g'(x) - a(x)] - q^2(x) = b(x).$$

Но это уравнение является уравнением Рикатти, и, как известно [3], в общем случае оно не разрешимо в квадратурах.

Отсюда следует известный результат [3]: к сожалению, линейные дифференциальные уравнения 2-го порядка с произвольными коэффициентами в общем виде не разрешимы в квадратурах. Поэтому необходимо сосредоточить внимание на частных случаях.

4. Частные ситуации

Рассмотрим случай, когда коэффициент *q(x)* в уравнении (3.3) постоянен. Тогда система (3.4) примет вид

$$\begin{cases} g'(x) - p(x) - q = a(x), \\ p(x)\cdot q = b(x). \end{cases} \tag{4.1}$$

Выразим функцию *p(x)* из 1-го уравнения системы и, подставив во 2-ое, получим, что для того чтобы определить значение *q*, нужно решить квадратное уравнение

$$q^2 - q[\,g'(x) - a(x)\,] + b(x) = 0.$$

Его корни можно получить из формулы

$$q = \frac{[g'(x) - a(x)] \pm \sqrt{[g'(x) - a(x)]^2 - 4b(x)}}{2}. \tag{4.2}$$

Случай Q. Нетрудно увидеть, что коэффициент q будет постоянен, если разность $g'(x) - a(x)$ и коэффициент b уравнения (3.1) являются постоянными числами.

Случай Q имеет место для уравнения Лагранжа

$$(lx+m)^2 y'' + a(lx+m)y' + by = f(x). \tag{4.3}$$

Поэтому его можно решить, разложив в цепочку уравнений

$$(lx+m)z' - pz = f(x), \tag{4.4}$$

$$(lx+m)y' - qy = z. \tag{4.5}$$

Для определения значений коэффициентов p и q подставим выражение для z из уравнения (4.5) в (4.4).

Раскроем скобки и, приведя подобные члены, получим систему, которая позволит определить коэффициенты p и q:

$$\begin{cases} p + q = l - a, \\ p \cdot q = b. \end{cases} \tag{4.6}$$

Пример 3.

Проинтегрируем уравнение Лагранжа

$$(2x+1)^2 y'' + 12(2x+1)y' + 24y = e^x. \tag{4.7}$$

Для того чтобы разложить это уравнение, решим алгебраическую систему $\begin{cases} 2 - p - q = 12, \\ p \cdot q = 24, \end{cases}$ и, воспользовавшись решением системы $(-4; -6)$, разложим уравнение (4.7) в цепочку

$$(2x+1)z' + 4z = e^x, \tag{4.8}$$

$$(2x+1)y' + 6y = z. \tag{4.9}$$

Решив уравнения (4.8), получим функцию $z = [(2x-1)e^x + C](2x+1)^{-2}$. Подставим ее в правую часть уравнения (4.9) и, проинтегрировав, получим общее решение уравнения (4.7)

$$y = [(2x-3)e^x + Cx + C_1](2x+1)^{-3}.$$

Легко увидеть, что условиям случая Q также удовлетворяют коэффициенты уравнений, рассмотренных в пунктах 1 и 2. В то же время, можно установить, что и уравнения Чебышева являются частным случаем уравнений, соответствующих случаю Q. Этим мы займемся в следующем пункте.

5. Уравнение Чебышева

Перепишем уравнение Чебышева

$$(1-x^2)y'' - xy' + r^2 y = 0 \tag{5.1}$$

в виде уравнения (3.1)

$$\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2 y'' - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\sqrt{1-x^2}\,y' + r^2 y = 0. \tag{5.2}$$

Продифференцируем функцию $g(x) = \sqrt{1-x^2}$ и убедимся в том, что она совпадает с коэффициентом $a(x) = -\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ уравнения (5.2) , то есть имеет место случай Q.

Поэтому, для того чтобы решить уравнение (5.1), найдем коэффициенты p и q из системы $\begin{cases} p+q=0, \\ p \cdot q = r^2 \end{cases}$

и разложим уравнение (5.2):

$$\sqrt{1-x^2}\ z' + irz = 0, \tag{5.3}$$

$$\sqrt{1-x^2}\ y' - iry = z, \tag{5.4}$$

Решение уравнения (5.3) $z = Ce^{ir \arccos x}$.

Поэтому уравнение (5.4)

$$\sqrt{1-x^2}\ y' - iry = Ce^{ir \arccos x},$$

так же как и уравнение (5.2), имеет решение

$$y = C_1 e^{ir \arccos x} + C_2 e^{-ir \arccos x}.$$

Используя свойства линейных дифференциальных уравнений, решение уравнения Чебышева можно записать в другом, более привычном виде:

$$y = C_1 \sin(r \cdot \arccos x) + C_2 \cos(r \cdot \arccos x).$$

6. Случай Q

В пунктах 4 и 5 обсуждались уравнения, относящиеся к случаю Q. Это можно считать как достоинством, так и недостатком данной работы, но решения этих уравнений, хотя они и были получены другими методами, известны. Поэтому приведем пример уравнения, которое относится к случаю Q и не относится, по нашему мнению, к известным классам уравнений, которые интегрируются в квадратурах.

Пример 4.

Проинтегрируем уравнение

$$x^4 y'' + x^2(2x+6)y' + 5y = e^{5/x}. \tag{6.1}$$

Несложно убедиться в том, что имеет место случай Q:

разность $g'(x) - a(x) = -6$ и коэффициент $b = 5$ постоянны.

Поэтому решим алгебраическую систему $\begin{cases} 2x - p - q = 2x + 6, \\ p \cdot q = 5, \end{cases}$ и, воспользовавшись решением системы $(-1; -5)$, разложим уравнение (6.1) в цепочку

$$x^2 z' + z = e^{5/x}, \tag{6.2}$$

$$x^2 y' + 5y = z. \tag{6.3}$$

Решив уравнения (6.2), получим функцию $z = (-1/4)e^{5/x} + Ce^{1/x}$. Подставим ее в правую часть уравнения (6.3) и, проинтегрировав, получим общее решение уравнения (6.1)

$$y = (1/4x)e^{5/x} + C_1 e^{1/x} + C_2 e^{5/x}.$$

7. Случай $(p(x), q)$

Представление линейного дифференциального уравнения 2-го порядка в виде (3.1) выглядит несколько экзотично. Причины этого довольно понятны – мы хотели получить класс уравнений, который интегрируется в квадратурах и включает в себя уравнения Эйлера и Лагранжа. И в какой-то степени это нам удалось.

Для того чтобы анализировать вопросы разрешимости в квадратурах, в общем случае, более уместно рассматривать уравнение вида

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = f(x). \tag{7.1}$$

В пункте 1 рассмотрено уравнение с постоянными коэффициентами a и b и показано, что в этом случае уравнение можно представить в виде цепочки линейных дифференциальных уравнений 1-го порядка с постоянными коэффициентами p и q:

$$z' - pz = f(x), \tag{7.2}$$

$$y' - qy = z, \tag{7.3}$$

Говоря об обобщении ситуации, будет естественно рассмотреть ситуацию, в которой один из коэффициентов, пусть q, будет постоянен, а второй коэффициент p будет переменным – случай $(p(x), q)$.

Тогда, подставив (7.3) в (7.2), получим, что уравнение (7.1) можно разложить в цепочку вида (7.2) – (7.3) и, соответственно, проинтегрировать в квадратурах,

если $$\begin{cases} p(x) + q = -a(x) \\ p(x) \cdot q = b(x) \end{cases}$$

Пример 5.

Рассмотрим уравнение

$$xy'' - (2x+1)y' + 2y = 4x^2e^{2x}. \tag{7.4}$$

Разделив уравнение на x, приведем его к стандартному виду:

$$y'' - (2 + 1/x)y' + (2/x)y = 4xe^{2x} \tag{7.5}$$

и убедимся в том, что оно относится к случаю $(p(x), q)$.

Следовательно, уравнение (7.5) раскладывается в цепочку

$$z' - z/x = 4xe^{2x}, \tag{7.6}$$

$$y' - 2y = z. \tag{7.7}$$

Проинтегрировав уравнение (7.6), получим, что

$$z = 2xe^{2x} + Cx.$$

Тогда общее решение уравнения (7.7) –

$$y = x^2e^{2x} + C_1 e^{2x} + C_2 (2x+1).$$

Литература

1. *Кыдыралиев С.К., Урдалетова А.Б.* Введение в линейные разностные и дифференциальные уравнения. – Бишкек: БГИЭиК, 2000.
2. *Кыдыралиев С.К.* Финансовые и инвестиционные расчеты. – Бишкек: АУЦА, 2007.
3. *Матвеев Н.М.* Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. – Минск: Вышэйшая школа, 1974.