что наводнения не будет, c_f и c_{nf} – это потребление при наводнении и при отсутствии наводнения соответственно. Вероятность наводнения $p = 0.1$. Кондитерская фабрика оценивается стоимостью в \$ 500000 при отсутствии наводнения и то, что останется от фабрики после наводнения, будет оценено только как \$ 50000. Предположим следующие условия страховки: если владелец застрахует фабрику на \$ 1, то он должен заплатить \$ 0.1 за страховку независимо от того, будет или не будет наводнение. В случае наводнения он получит \$ 1 для возмещения убытков. Найти оптимальное потребление при наводнении и при отсутствии наводнения. Найти сумму, на которую ему необходимо застраховаться.

Запишем, чему равно потребление при наводнении и при отсутствии наводнения:

$$c_{nf} = 500000 - 0.1x$$
$$c_f = 50000 + 0.9x.$$

Исключив x из обоих уравнений, мы получим бюджетное ограничение $c_{nf} + 9c_f = 4550000$.

$$\mathrm{MRS}(c_{nf}, c_f) = -\frac{0.9c_f}{0.1c_{nf}}.$$

Приравнивая $\mathrm{MRS}(c_f, c_{nf})$ и угловой коэффициент бюджетного ограничения, получим $\frac{c_{nf}}{c_f} = 1$ и в оптимальной точке потребление имеет вид $(c_{nf}, c_f) = (455000, 455000)$.

Таким образом, если он застрахует кондитерскую фабрику, то в случае наводнения он получит \$ 450000, такая страховка будет стоить \$ 45000.

Литература

1. Крушвиц Л. – Финансирование и инвестиции. – СПб.: Изд-во “Питер”, 2000.
2. Hal R. Varian-Intermediate Microeconomics. A modern Approach. Third Edition. University of Michigan, 1987.
3. Красс М.С. – Математика для экономических специальностей. – М.: ИНФРА-М, 1998.

С. Н. Скляр,

доктор физико-математических наук,

руководитель направления "Естественные науки и информационные технологии"

Разностные схемы для решения сингулярно возмущенных задач, записанных в консервативной форме

Для уравнения

$$\varepsilon u''(x) + [a(x)u(x)]' = f(x), \quad x \in (0,1) \tag{1}$$

рассмотрим две краевые задачи: задачу Дирихле

$$u(0) = \varphi_0, \ u(1) = \varphi_1 \tag{2}$$

и третью краевую задачу:

$$\begin{cases} [\zeta_0 - a(0)]u(0) - \varepsilon u'(0) = \varphi_0, \\ [\zeta_1 + a(1)]u(1) + \varepsilon u'(1) \ = \varphi_1. \end{cases} \tag{3}$$

Будем считать выполнеными условия:

$$a, f \in C[0,1]; \ \varepsilon \in (0, \varepsilon_0]; \ \zeta_0 \geq 0, \zeta_1 \geq 0. \tag{4}$$

Задачи (1), (2) и (1), (3) являют собой примеры сингулярно возмущенных краевых задач, решения которых формируют область больших градиентов или, так называемый, пограничный слой. Известно [1], что подобные задачи возникают в гидротермодинамических моделях и предъявляют повышенные требования к разностным схемам, осуществляющим их численную реализацию. Одним из основных критериев качества такой разностной схемы является требование равномерной по малому параметру сходимости приближенного решения к точному. Принято считать [2], что наличие равномерной сходимости свидетельствует о том, что разностная схема в достаточной степени отражает специфику сингулярно возмущенной задачи. Реализация этого критерия существенно сужает класс подходящих разностных схем и усложняет технику получения оценок сходимости, так как требует априорной информации об асимптотических свойствах решения исходной задачи и детального отслеживания параметрических зависимостей в константах этих оценок. Тем не менее схемы, обладающие свойством равномерной по малому параметру сходимости, являются в некотором смысле универсальными: они гарантируют достаточную точность решения при любых соотношениях между малыми параметрами и размерами сеточных ячеек.

Построенные в данной работе разностные схемы обладают вышеуказанным свойством, более того, они гарантируют равномерную по малому параметру сходимость не только для решений рассматриваемых задач, но и для их производных. Используемая в работе методика построения разностных схем впервые была предложена в [3–5], развивалась в статьях [6–8], для двумерного случая реализована в [9], а при построении дискретных гидродинамических моделей применялась в работах [10–12]. Отметим также работу [13], в которой использован близкий к нашему метод дискретизации адвективно-диффузионных уравнений.

Исследуем свойства решений задач (1), (2) и (1), (3). Эти решения могут быть представлены в следующем виде:

$$u(x) = z_0(\varepsilon)P^{(0)}(x) + z_1(\varepsilon)P^{(1)}(x) + \int_0^1 f(y)G(x,y)dy, \tag{5}$$

где

$$P^{(0)}(x) \equiv \frac{1}{\gamma(\varepsilon)}\left\{\int_x^1 \exp[-\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^1 a(s)ds]d\tau\right\}\exp\left[-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x a(s)ds\right],$$

$$P^{(1)}(x) \equiv \frac{1}{\gamma(\varepsilon)}\left\{\int_0^x \exp[-\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^1 a(s)ds]d\tau\right\},$$

$$\gamma(\varepsilon) \equiv \int_0^1 \exp[-\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^1 a(s)ds]d\tau,$$

$$G(x,y) \equiv \begin{cases} -\dfrac{\gamma(\varepsilon)}{\varepsilon}P^{(0)}(x)P^{(1)}(y)\exp\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\int_0^y a(s)ds\right], & y < x; \\ -\dfrac{\gamma(\varepsilon)}{\varepsilon}P^{(1)}(x)P^{(0)}(y)\exp\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\int_0^y a(s)ds\right], & y \ge x. \end{cases}$$

В случае задачи (1), (2) $z_0(\varepsilon) = \varphi_0$, $z_1(\varepsilon) = \varphi_1$; а для задачи (1), (3):

$$z_0(\varepsilon) = \frac{\gamma(\varepsilon)(\varphi_0 - M^{(0)})\zeta_1 + \varphi_0 + \varphi_1 - \int_0^1 f(y)dy}{\gamma(\varepsilon)\zeta_0\zeta_1 + \zeta_1 \exp\left[-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^1 a(s)ds\right] + \zeta_0},$$

$$z_1(\varepsilon) = \frac{\gamma(\varepsilon)(\varphi_1 - M^{(1)})\zeta_0 + (\varphi_0 + \varphi_1 - \int_0^1 f(y)dy)\exp\left[-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^1 a(s)ds\right]}{\gamma(\varepsilon)\zeta_0\zeta_1 + \zeta_1 \exp\left[-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^1 a(s)ds\right] + \zeta_0},$$

$$M^{(0)} \equiv \int_0^1 f(y)P^{(0)}(y)\exp\left[\frac{1}{\varepsilon}\int_0^y a(s)ds\right]dy,$$

$$M^{(1)} \equiv \int_0^1 f(y)P^{(1)}(y)\exp\left[-\frac{1}{\varepsilon}\int_y^1 a(s)ds\right]dy,$$

при этом предполагается, что ζ_0, ζ_1 таковы, что знаменатели в выражениях $z_0(\varepsilon)$, $z_1(\varepsilon)$ не обращаются в ноль, это можно гарантировать, например, при условиях $\zeta_0 > 0$, $\zeta_1 \ge 0$. Проверка того, что функция (5) является решением задач (1), (2) и (1), (3), при соответствующем выборе величин $z_0(\varepsilon)$, $z_1(\varepsilon)$, может быть осуществлена непосредственной подстановкой (5) в уравнение и краевые условия.

Теорема 1. Предположим выполненными условия (4), а также неравенство

$$a(x) \ge \alpha > 0, \quad x \in [0,1]; \tag{6}$$

пусть, кроме того, в краевых условиях (3) $\zeta_0 > 0$. Тогда для решений задач (1), (2) и (1), (3) и любого $x \in [0,1]$ имеет место оценка:

$$|u(x)| \le C\left(|\varphi_0| + |\varphi_1| + \int_0^1 |f(y)|dy\right). \tag{7}$$

Если, дополнительно, $a' \in L_\infty(0,1)$, то можно записать оценку и для производной:

$$|u'(x)| \le C\left(1 + \varepsilon^{-1}\exp\left(\frac{\alpha x}{\varepsilon}\right)\right). \tag{8}$$

Константы C в (7) и (8) не зависят от ε.

Доказательство. Неравенство (7) следует непосредственно из представления (5), если воспользоваться оценками:

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0 + A} \le \gamma(\varepsilon) \le \frac{\varepsilon}{\alpha}, \quad (A \equiv \max a(x)),$$

$$|P^{(0)}(x)| \le \exp\left[-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x a(s)ds\right],$$

$$|P^{(1)}(x)| \le \frac{A + \varepsilon_0}{\alpha},$$

$$|z_0(\varepsilon)| + |z_1(\varepsilon)| \le C\left(|\varphi_0| + |\varphi_1| + \int_0^1 |f(y)|dy\right).$$

Для доказательства оценки (8) достаточно, после дифференцирования представления (5), вместе с приведенными выше неравенствами использовать еще и следующие:

$$|P^{(0)}(x)| \le \frac{C}{\varepsilon}\exp\left[-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x a(s)ds\right],$$

$$|P^{(1)}(x)| \le C\left(1 + \varepsilon^{-1}\exp\left(\frac{\alpha x}{\varepsilon}\right)\right).$$

При получении этих последних неравенств и используется условие $a' \in L_\infty(0,1)$ ■

Неравенства (7), (8) являются типичными для задач, решения которых формируют пограничный слой вблизи левого конца отрезка: точки x = 0; неравенства (7), (8) также необходимы при исследовании сходимости равномерно-точных разностных схем.

Приступим к построению разностной схемы. Предположим, что $0 \le p < q \le 1$, уравнение (1) домножим на достаточно гладкую функцию v(x) и проинтегрируем по отрезку [p, q], в том числе и по частям; обозначив $\theta(x) \equiv \varepsilon u'(x) + a(x)u(x)$, получим:

$$[\theta v]_p^q - \int_p^q (\varepsilon u' + au)v'ds = \int_p^q fvds.$$

Пусть $\bar{a}$ – константа, аппроксимирующая значения функции a(x) на отрезке [p, q], введем эту константу в полученное тождество, записав его в виде:

$$[\theta v]_p^q - \int_p^q (\varepsilon u' + \bar{a}u)v'ds = \delta(p,q), \tag{9}$$

$$\delta(p,q) \equiv \int_p^q \{f(s)v(s) + [a(s) - \bar{a}]u(s)v'(s)\}ds. \tag{10}$$

Еще раз интегрируя по частям (10), приходим к основному интегро- разностному тождеству:

$$[\theta v - \varepsilon u v']_p^q + \int_p^q u(\varepsilon v'' - \bar{a}v')ds = \delta(p,q). \tag{11}$$

В соответствии с методикой [6–8], выберем тестовые функции $v^{(0)}(x)$ и $v^{(1)}(x)$ в тождестве (11), считая, что обе они являются решениями уравнения

$$\varepsilon v''(x) - \bar{a}v'(x) = 0, \ x \in (p,q);$$

но удовлетворяют различным краевым условиям:

$$v^{(0)}(p) = 1, \ v^{(0)}(q) = 0;$$

$$v^{(1)}(p) = 0, \ v^{(1)}(q) = 1.$$

Очевидно, что для $x \in (p,q)$ эти функции могут быть найдены:

$$v^{(0)}(x) = \frac{1 - \exp[-\bar{a}(q-x)/\varepsilon]}{1 - \exp[-\bar{a}(q-p)/\varepsilon]},$$

$$v^{(1)}(x) = \frac{\exp[-\bar{a}(q-x)/\varepsilon] - \exp[-\bar{a}(q-p)/\varepsilon]}{1 - \exp[-a(q-p)/\varepsilon]}.$$

Подставляя $v^{(0)}(x)$ в (11), получим:

$$-\theta(p) + \varepsilon(\bar{R}\operatorname{cth}\bar{R})\frac{u(q) - u(p)}{q-p} + \bar{a}\frac{u(q) + u(p)}{2} = \delta^{(0)}(p,q). \tag{12}$$

Полагая в (11) $v = v^{(1)}(x)$, имеем:

$$\theta(q) - \varepsilon(\bar{R}\operatorname{cth}\bar{R})\frac{u(q) - u(p)}{q-p} - \bar{a}\frac{u(q) + u(p)}{2} = \delta^{(1)}(p,q). \tag{13}$$

Здесь

$$\bar{R} \equiv \frac{\bar{a}(q-p)}{2\varepsilon}.$$

На отрезке [0,1] рассмотрим сетку:

$$0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_{N-1} < x_N = 1,$$

введем обозначения:

$$h_{i+1/2} \equiv x_{i+1} - x_i,\ h \equiv \max_{0 \le i \le N-1} h_{i+1/2},\ \bar{h} \equiv \min_{0 \le i \le N-1} h_{i+1/2}.$$

При построении разностной схемы нам не потребуется каких-либо ограничений на множество рассматриваемых сеток, однако при изучении вопросов сходимости мы будем использовать класс сеток который опишем следующим образом. Пусть **N** – множество натуральных чисел.

Определение. Семейство сеток $\{\{x_i\}_{i=0}^{N} | N \in \mathbf{N}\}$ будем называть *квазиравномерным*, если найдутся константы γ_0 и γ_1, не зависящие от i и N, такие, что для любого $N \in \mathbf{N}$

$$h \le \gamma_0 \bar{h},\ |h_{i+1/2} - h_{i-1/2}| \le \gamma_1 h^2,\ i = 1,2,\ldots N-1 \ \blacksquare$$

Положим в (12) и (13) $p = x_i, q = x_{i+1}$. Обозначим символами $\bar{u}_i$ и $\bar{\theta}_i$ приближенные значения величин

$$u_i \equiv u(x_i) \text{ и } \theta_i \equiv \theta(x_i) \equiv \varepsilon u'(x_i) + a(x_i)u(x_i),$$

соответственно. Предположим, что константа $\bar{f}_{i+1/2}$ аппроксимирует функцию f(x) на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$; ограничимся простейшим вариантом представления правой части уравнения (1) и, отбросив ошибки аппроксимации

$$\hat{\delta}^{(0)}(x_i, x_{i+1}) \equiv \delta^{(0)}(x_i, x_{i+1}) - \bar{f}_{i+1/2} h_{i+1/2} / 2,$$

$$\hat{\delta}^{(0)}(x_i, x_{i+1}) \equiv \delta^{(0)}(x_i, x_{i+1}) - \bar{f}_{i+1/2} h_{i+1/2} / 2,$$

приходим к следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} \zeta_0 \bar{u}_0 - \eta_0 \bar{\theta}_0 = \varphi_0, \\ \bar{\theta}_i - \varepsilon(\bar{R}\operatorname{cth}\bar{R})_{i+1/2} D_x \bar{u}_{i+1/2} - \bar{a}_{i+1/2} S_x \bar{u}_{i+1/2} = \\ = -\bar{f}_{i+1/2} h_{i+1/2} / 2, \\ -\bar{\theta}_{i+1} - \varepsilon(\bar{R}\operatorname{cth}\bar{R})_{i+1/2} D_x \bar{u}_{i+1/2} + \bar{a}_{i+1/2} S_x \bar{u}_{i+1/2} = \\ = -\bar{f}_{i+1/2} h_{i+1/2} / 2,\ (i = 0,1,\ldots,N-1); \\ \zeta_1 u_N + \eta_1 \bar{\theta}_N = \varphi_1. \end{cases} \tag{14}$$

Система (14) при $\eta_0 = \eta_1 = 0,\ \zeta_0 = \zeta_1 = 1$ аппроксимирует задачу (1), (2), а при $\eta_0 = \eta_1 = 1$ – задачу (1), (3). Отметим, кроме того, что в (14) использованы общепринятые обозначения для операторов разностного дифференцирования и осреднения:

$$D_x \bar{u}_{i+1/2} \equiv \frac{\bar{u}_{i+1} - \bar{u}_i}{h_{i+1/2}};\ S_x \bar{u}_{i+1/2} \equiv \frac{\bar{u}_{i+1} + \bar{u}_i}{2}.$$

Известно, что уравнение (1) обладает определенными интегральными свойствами, в частности, после интегрирования по отрезку [0,1], оно преобразуется к виду:

$$\theta(1)-\theta(0)=\int_0^1 f(x)dx. \tag{15}$$

Домножив (1) на функцию u(x) и интегрируя результат по отрезку [0,1], в том числе и по частям, получим:

$$\left[\theta(x)u(x)-\frac{a(x)u^2(x)}{2}\right]_{x=0}^{x=1}=\int_0^1\left\{\varepsilon[u'(x)]^2-\frac{a'(x)}{2}u^2(x)\right\}dx+$$
$$+\int_0^1 f(x)u(x)dx. \tag{16}$$

Одной из важных положительных характеристик разностной схемы является свойство сохранять в дискретной форме интегральные законы, присущие дифференциальному уравнению, которое эта схема аппроксимирует. В частности, интегральные характеристики разностной схемы особенно значимы, если, по тем или иным причинам, шаг разностной сетки не может быть выбран достаточно малым, чтобы обеспечить теоретически обоснованную сходимость. Эти факты неоднократно были отмечены в литературе, достаточно упомянуть монографии [1, 14–16]. Разностная схема для уравнения (1), обладающая дискретным аналогом интегрального закона (15), по общепринятой терминологии (см., например, [14, 16]) называется «консервативной». Если эта схема обеспечивает выполнение дискретного аналога закона (16), то, распространяя на одномерный случай терминологию монографии [16], ее можно назвать «нейтральной». Покажем, что разностная схема (14) является как консервативной, так и нейтральной. Действительно, складывая уравнения из (14) и суммируя результат по i от 0 до N-1, получим дискретный аналог закона (15):

$$\bar\theta_N-\bar\theta_0=\sum_{i=0}^{N-1}h_{i+1/2}\bar f_{i+1/2}.$$

Чтобы доказать нейтральность схемы (14), домножим уравнение, содержащее $\bar\theta_i$, на $\bar u_i$ и сложим его с уравнением, содержащим $\bar\theta_{i+1}$ и домноженным на $\bar u_{i+1}$, результат просуммируем по i от 0 до N-1, в итоге получим:

$$\bar\theta_N\bar u_N-\bar\theta_0\bar u_0-\sum_{i=0}^{N-1}h_{i+1/2}\frac{\bar a_{i+1/2}}{2}D_x(\bar u^2)_{i+1/2}=\sum_{i=0}^{N-1}h_{i+1/2}\varepsilon(\bar R\operatorname{cth}\bar R)_{i+1/2}\left(D_x\bar u_{i+1/2}\right)^2+$$
$$+\sum_{i=0}^{N-1}h_{i+1/2}\bar f_{i+1/2}S_x\bar u_{i+1/2}.$$

Теперь, суммируя по частям в левой части последнего соотношения, приходим к дискретному аналогу закона (16) в следующей форме:

$$\left(\bar\theta_N\bar u_N-\bar\theta_0\bar u_0\right)-\left[\frac{a(1)}{2}\bar u_N^2-\frac{a(0)}{2}\bar u_0^2\right]=\sum_{i=0}^{N-1}h_{i+1/2}\varepsilon(\bar R\operatorname{cth}\bar R)_{i+1/2}\left(D_x\bar u_{i+1/2}\right)^2-$$
$$-\sum_{i=0}^{N}h_iD_x\left(\frac{\bar a}{2}\right)_i\bar u_i^2+\sum_{i=0}^{N-1}h_{i+1/2}\bar f_{i+1/2}S_x\bar u_{i+1/2}. \tag{17}$$

В (17) приняты обозначения:

$$D_x\left(\frac{\bar a}{2}\right)_i \equiv \frac{1}{2}\frac{\bar a_{i+1/2}-\bar a_{i-1/2}}{h_i};\ i=1,2,...N-1;$$

$$D_x\left(\frac{\bar a}{2}\right)_0 \equiv \frac{1}{2}\frac{\bar a_{1/2}-\bar a(0)}{h_0},\ D_x\left(\frac{\bar a}{2}\right)_N \equiv \frac{1}{2}\frac{\bar a(1)-\bar a_{N-1/2}}{h_N};$$

$$h_i \equiv (h_{i+1/2}+h_{i-1/2})/2,\ i=0,1,...N-1;$$

$$h_0 \equiv h_{1/2}/2,\ h_N \equiv h_{N-1/2}/2.$$

Заметим, что аппроксимационная вязкость $\varepsilon(\overline{R}\mathrm{cth}\overline{R})$, присутствующая как в схеме (14), так и в дискретном законе (17), вообще говоря, больше физической вязкости уравнения (1), поэтому схему (14) целесообразно, на наш взгляд, идентифицировать как диссипативно-нейтральную, имея в виду наличие дополнительного диссипативного эффекта в дискретном энергетическом тождестве (17) [1].

Отметим, что разностные аппроксимации несамосопряженного уравнения в дивергентной форме предложены и исследованы также в работах Berger [17], Kellogg et al. [18] и в монографии [2], однако наш вариант (14) отличается от схем из указанных источников, кроме того, он позволяет получить аппроксимацию производной.

Следующее утверждение определяет свойства дискретной задачи (14), его доказательство мы не приводим в целях сокращения изложения, оно может быть проведено с использованием методики работ [7, 8, 12].

Теорема 2. Рассмотрим краевые задачи (1)–(3) и предположим, что для них выполнены условия (4), (6), а в случае краевых условий (3) – неравенство $\zeta_0 > 0$. Пусть, кроме того: $f \in C^2[0,1]$, $a \in C^3[0,1]$. Предположим далее, что рассматриваемое семейство сеток квазиравномерно в смысле Определения, и

$$\bar a_{i+1/2} = \frac{a(x_{i+1})+a(x_i)}{2},\ \bar f_{i+1/2} = \frac{f(x_{i+1})+f(x_i)}{2}.$$

Тогда задача (14) имеет единственное решение $\{\bar u, \bar\theta\}$ как в случае краевых условий Дирихле ($\eta_0 = \eta_1 = 0,\ \zeta_0 = \zeta_1 = 1$), так и для краевых условий третьего рода ($\eta_0 = \eta_1 = 1$). Для этих решений и для соответствующих решений $u(x)$, $\theta(x) \equiv \varepsilon u'(x) + a(x)u(x)$ исходной дифференциальной задачи имеет место оценка

$$\|\bar u - u\|_{h,\infty} + \|\bar\theta - \theta\|_{h,\infty} \le C\gamma_0(1+\gamma_1)\frac{h^2}{\varepsilon+\alpha h}. \quad (18)$$

Константа C в этом неравенстве не зависит от ε и параметров сетки, а $\|\bar u\|_{h,\infty} \equiv \max\limits_{0\le i\le N}|\bar u_i|$ для произвольной сеточной функции $\bar u = \{\bar u_i\}_{i=0}^N$ ■

Легко видеть, что неравенство (18) гарантирует равномерную по ε сходимость с первым порядком и классическую сходимость (сходимость при фиксированном ε) со вторым порядком по h.

Литература

1. Роуч П. Вычислительная гидродинамика. – М.: Мир, 1980. – 616 с.
2. Дулан Э., Миллер Дж., Шилдерс У. Равномерные численные методы решения задач с пограничным слоем. – М.: Мир, 1983. – 200 с.
3. Скляр С.Н. О дискретизации задач с пограничным слоем при помощи одного проекционного варианта метода интегральных тождеств. I. Несамосопряженное уравнение, первая краевая задача // Изв. АН Киргизской ССР. Физ.-техн. и матем. науки. – 1988. – № 4. – С. 10–23.
4. Скляр С.Н. О дискретизации задач с пограничным слоем при помощи одного проекционного варианта метода интегральных тождеств. II. Несамосопряженное уравнение, третья краевая задача//Изв. АН Киргизской СОР. Физ.-техн. и матем. науки. – 1989. – № I. – С. 3–10.
5. Скляр С.Н. О дискретизации задач с пограничным слоем при помощи одного проекционного варианта метода интегральных тождеств. III. Самосопряженное уравнение // Изв. АН Киргизской СОР. Физ.-техн. и матем. науки. – 1989. – № 4. – С. 3–11.
6. Sklyar S.N. A projective version of the Integral Interpolation method and It's application for the discretization of the singular perturbation problems // Advanced Mathematics: Computations and Applications. Proc. of the International Conf. AMCA – 95 (Novosibirsk, Russia, 20 – 24 June, 1995). Ed. by A.S. Alekseev and N.S. Bakhvalov. – NGC Pabllsher, Novosibirsk, 1995. – P. 380–385.
7. Скляр С.Н., Бакиров Ж.Ж. Проекционный метод построения разностных схем для задач с пограничными слоями // Изв. НАН Кыргызской Респ.: «Эхо науки». – 1997. – № 2–3. – С. 36–47.
8. Скляр С.Н., Бакиров Ж.Ж.. Модификация разностных схем для задач с пограничными слоями в рамках проекционного варианта интегро- интерполяционного метода // Изв. НАН Кыргызской Респ. – 1999. – № 3–4. – С. 5–8.
9. Скляр С.Н., Бакиров Ж.Ж. Двумерное эллиптическое уравнение: вычисление решения и его производных. ДЕП. в ВИНИТИ 14.06.95. – № I745–B95. – 22 с.
10. Kochergin V.P., Sklyar S.N., Sultanov R.K. On the problem of numerical ocean hydrodynamics modeling // Soviet Journal of Physical Oceanography. – 1991. – V.2. – № 2. – P. 89–98.
11. Dunets T.V., Sklyar S.N. Mathematical model for thermodynamics of an elongated reservoir // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. – 1994. – V. 9. – № 6. – P. 515–533.
12. Еремеев В.Н., Кочергин В.П., Кочергин С.В., Скляр С.Н. Математическое моделирование гидродинамики глубоководных бассейнов. – Севастополь: "ЭКОСИ-Гидрофизика", 2002. – 238 с.
13. Пененко В.В. Численные схемы для конвективно-диффузионных уравнений с использованием локальных сопряженных задач. – Новосибирск, 1993. – 49 с. (Препринт / АН СССР. Сиб. отделение. Вычислительный центр; № 984).
14. Самарский А.А. Теория разностных схем. – М.: Наука, 1983. – 616 с.
15. Самарский А.А., Попов Ю.П. Разностные схемы газовой динамики. – М.: Наука, 1980. – 352 с.
16. Булеев Н.И. Пространственная модель турбулентного обмена. – М.: Наука, 1989. – 344 с.
17. Berger A.E. A conservative uniformly accurate difference method for a singular perturbation problem in conservation form // SIAM J. Numer. Anal. – 1986. – V.23. – №6. – P. 1241–1253.
18. Kellog R.B., Shubin G.R., Stephens A.B. Uniqueness and the cell Reynolds number // SIAM J. Numer. Anal. – 1980. – V.17. – P. 733–739.