Б. М. Урмамбетов,
кандидат физико-математических наук, доцент,
ассоциированный профессор направления
"Естественные науки и информационные технологии"

Задача о принятии решения в условиях штрафных санкций

В жизни часто встречаются случаи, когда изменяются цены на факторы производства. При фиксированных располагаемых средствах фирма не может поставить количество товара по контракту. Тогда фирма должна принять одно из следующих решений: принять штрафные санкции или выполнить контракт. Задача может быть использована студентами, а также решение задачи могут использовать предприниматели, занимающиеся производством.

Пусть некоторое предприятие имеет производственную функцию

$$Q = F(K, L).$$

Стоимости единицы капитала и труда соответсвенно равны Pk и PL, и пусть I – располагаемые средства.Какое количество капитала и труда должна выбрать фирма, чтобы выпустить максимальный обьем производства?

Решение:

Пусть предприятие выбирает капитал и труд в количествах K и L, тогда ее затраты $PK^{*} K + PL^{*} L$, и они должны равняться располагаемым средствам.

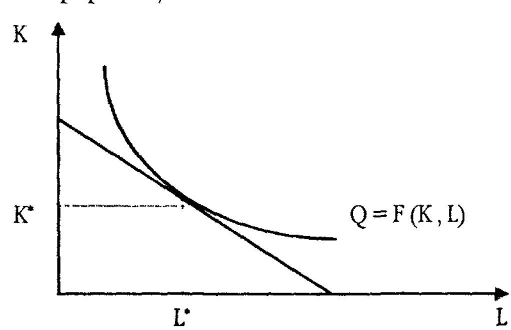
Имеем следующую задачу на максимум:

$Q = F(K, L) \rightarrow \max$

$Pk^{*} K + PL^{*} L = I$

$K \geq 0, L \geq 0$

Графическая интерпретация:



Прозводственная функция достигает максимума в точке касания изокосты и изокванты.

1. Выразим из уравнения изокосты один из факторов производства через другой (например K через L: $K = (I - P_L{}^{*} L) / Pk$).

2. Подставив в производственную функцию, получим функцию одной переменной:
$$Q = F[(I - P_L * L) / P_k, L]).$$
3. Наша задача сводится к задаче нахождения максимума функции одной переменной.

Итак, имеем задачу:
$Q = F[(I - P_L * L) / P_k, L] \rightarrow \max$
$L \geq 0.$
Аналогично, если мы выразим L через K, то получим :
$Q = F[(I - P_k * K) / P_L, K] \rightarrow \max$
$K \geq 0.$

Пример 1:
$Q = \sqrt{2K+2}\sqrt{3L+4}$
$P_k = 4, P_L = 2, I = 24$
$K^*, L^*, Q - ?$

Решение:
Уравнение изокосты $4K + 2L = 24$
$L = 12 - 2K$
$Q = \sqrt{2K+2}\sqrt{40-6K} \rightarrow \max$
$K \geq 0$
$K = 2.83$
$Q = -24 < 0$ следовательно точка $K^* = 2.83$ – точка максимума
$K^* = 2.83, L^* = 12 - 2K^* = 12 - 2.83 = 6.33,$
$Q^* = 13.23$

Пример 2: Фирма имеет производственную функцию
$Q = \sqrt{4K+2}\sqrt{2L+1}$
При данных $P_k = 10$, $P_L = 4$, $I = 500$ найти:

a) оптимальное сочетание капитала и труда, при котором фирма выпускает максимальный обьем производства,
b) цена на труд упала на 5%, какое количество капитала и труда должна выбрать фирма и на сколько изменился обьем производства,
c) найти изменение обьема с помощью дифференциала.

$Q = \sqrt{4K+2}\sqrt{2L+1}$
$P_k = 10, P_L = 4, I = 50$

a) $K^*, L^*, Q - ?$
b) $P_L \downarrow 5\%, Kn^*, Ln^*, Qn, Q - ?$
c) $dQ - ?$

Решение:
$10K + 4K = 500; K = 50 - 0.4L$
$$Q = \sqrt{200-1.6L}\sqrt{2L+1}$$
$$Q' = \frac{\sqrt{200-1.6L}}{\sqrt{2L+1}} - \frac{0.8\sqrt{2L+1}}{\sqrt{200-1.6L}}$$

L = 62.25
$Q < 0 \Rightarrow L^* = 4.25; K^* = 50 - 0.4 * 62.25 = 25.1$
$Q^* = 113.36$

b) Pk = 10 PL = 3.8 I = 500
10K + 3.8L = 500
K = 50 – 0.38L

$$Q = \sqrt{200 - 1.52L}\sqrt{2L + 1}$$

$$Q' = \frac{\sqrt{200 - 1.52L}}{\sqrt{2L + 1}} - \frac{0.8\sqrt{2L + 1}}{\sqrt{200 - 1.52L}}$$

– 3.04L + 199.24 = 0
$L = 65.54 \quad Q'' < 0 \Rightarrow$ точка максимума
$Ln^* = 65.54, \quad Kn^* = 50 - 0.38 * 65.54 = 25.09$
$Qn^* = 47.89 \quad \Delta Q = Qn^* - Q^* = 116.273 - 113.36 = 2.913$
$\Delta Q = 2.913$

c) $dQ = z'_K \, dK + z'_L \, dL$

$$dQ = \frac{2\sqrt{2L + 1}}{\sqrt{4K + 2}} dK + \frac{\sqrt{4K + 2}}{\sqrt{2L + 1}} dL$$

$\Delta K = Kn^* - K^* = -0.01; \quad \Delta L = Ln^* - L^* = 3.29$

подставляя прежние объемы капитала и труда, получим значение дифференциала
dQ = 2,95
dQ =2,95 и ΔQ = 2,913
дифференциал приблизительно равен изменению объема производства.

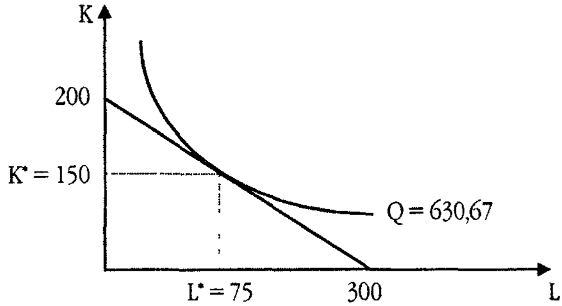
Пример 3:
Пусть фирма имеет производственную функцию Кобба-Дугласа
$Q = 5K^{0.75} L^{0.25}$,

при следующих данных Pk = 12 , PL = 8 , I = 2400 найти:

a) оптимальное сочетание капитала и труда,
b) цена на единицу капитала поднялась на 25%, на сколько процентов должна измениться цена на единицу труда, чтобы фирма фирма выпускала тот же максимальный обьем производства,
c) цена на единицу капитала поднялась на 25%, цена на единицу труда осталась прежней , какова должна быть максимальная эффективная годовая банковская процентная ставка, чтобы можно было увеличить располагаемые средства за счет кредита и при этом выполнить контракт на поставку того же обьема продукции, которую фирма предполагала поставить при старых ценах , если штрафные санкции за единицу продукции составляют s = $ 7.

Решение:

a) Решая задачу с помощью метода множителей Лагранжа, получим:
$LG(K, L, \lambda) = 5K^{0.75} L^{0.25} - \lambda(12K + 8L - 2400)$
$K^* = 150, \quad L^* = 75, \quad Q = 630.67$



b) Pk ↑ 25%, Pk = 16% PL – ?

Используя следующие формулы:

$$K^* = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\frac{I}{P_K}, \quad L^* = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\frac{I}{P_l} \text{ найдем}$$

$$K_1^* = 112.5, \ L_1^* = \frac{600}{P_L}$$

Решая показательное уравнение:

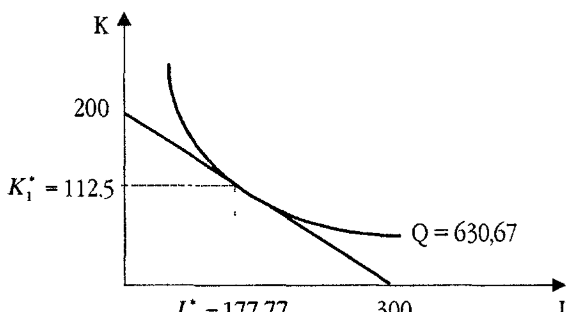
$$5*150^{0.75}*75^{0.25} = 5*112.5^{0.75}*\left(\frac{600}{P_L}\right)^{0.25}$$

получим:

PL = 3.375 , то есть цена на труд должна упасть на 57,81% и при этом оптимальные количества капитала и труда:

$$K_1^* = 112.5, \ L_1^* = 177.77, \ Q1 = 508.27$$

$$Q - Q1 = 630.67 - 508.27 = 122.5$$

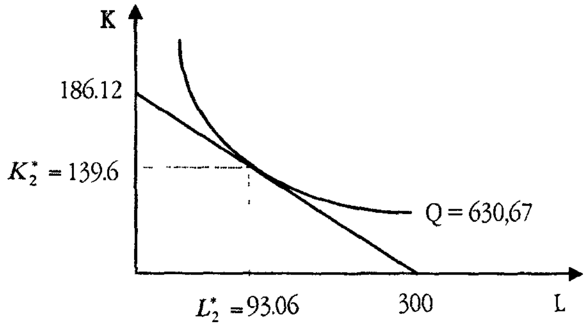


в) Pk = 16, PL = 8, I – ?

$$K_2^* = \frac{0.75*I_n}{16}, \ L_2^* = \frac{0.25*I_n}{8}$$

$$5\left(\frac{0.75*I_n}{16}\right)^{0.75}*\left(\frac{0.25*I_n}{8}\right)^{0.25} = 5*150^{0.75}*75^{0.25} \text{, откуда следует}$$

$I_n = 2977.94,\ K_2^* = 139.6,\ L_2^* = 93.06,\ Q = 630.67$



I_n – I = 2977.94 – 2400 = 577.94 – эту сумму следует взять в кредит в банке.

Штрафные санкции составят:

(Q – Q1)*s = 508.27*7 = 857.5

$577.94 \cdot (1 + r_e) = 857.5$

$r_e = 48.37\%$

Таким образом получили следующий вывод:

Для того, чтобы выполнить контракт на поставку продукции и при этом не платить штрафные санкции, банковская эффективная процентная ставка не должна превышать 48,37%.

Для нахождения максимальной банковской эффективной процентной ставки следует использовать следующую формулу:

$$r_e = \frac{(I_n - I)}{Q - Q_1} * s - 1.$$

Заключение:

При изменении цен на факторы производства и при заданном размере штрафа на единицу продукции решение фирмы зависит от процентной ставки:

если $r_e \le \frac{(I_n - I)}{Q - Q_1} * s - 1$, то выгоднее взять кредит в банке,

если $r_e \ge \frac{(I_n - I)}{Q - Q_1} * s - 1$, то выгоднее принять штрафные санкции.

Литература

1. Макконнелл К.Р., Брю С.Л. Экономикс. – М., 1992.
2. Шипачев В.С. Основы высшей математики. – М., 1989.