С.К. КЫДЫРАЛИЕВ,
А.Б. УРДАЛЕТОВА, Е.С. БУРОВА

МАТЕМАТИКА
для экономики, бизнеса и социальных наук. 1:
ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Оглавление

Обращение Вице-президента Американского университета в Центральной Азии, Генерального директора Инновационного колледжа АУЦА Чынгыза Шамшиева

“Сильный может победить одного, знающий − тысячу”, − говорит кыргызская пословица. Сегодня Кыргызстан имеет все основания для того, чтобы в будущем стать успешной страной. Главный ключ к развитию нашей республики — это образованная молодежь.

История знает примеры, когда взятый властью курс на развитие сферы образования в кратчайшие сроки выводил бедные государства в ряды богатейших. Ярчайший образец такого экономического чуда − Сингапур. Не имея природных ресурсов (и даже собственной пресной воды), раздираемый внутренними межнациональными конфликтами, этот крохотный город-государство всего за несколько десятилетий сумел превратиться из нищей страны третьего мира в высокоразвитую геополитическую единицу. По важнейшему экономическому показателю — величине валового внутреннего продукта на душу населения — Сингапур превосходит сегодня даже США. Один из ключевых факторов, предопределивших это чудо: качественное образование, уровень которого является одним из лучших в мире.

“Образованные, талантливые люди являются теми дрожжами, которые заставляют общество расти и преобразовывают его”, − писал Ли Куан Ю, бывший премьер-министр Сингапура, с деятельностью которого и связаны успехи его Родины.

Кыргызстан уже пришел к пониманию того, что образованная молодежь способна стать для республики проводником в лучшее будущее. Сегодня правительство направляет на сферу образования довольно крупные суммы — почти четверть всех расходов государственного бюджета. Осталось сделать решающий шаг − трансформировать количество в качество.

На протяжении последних 30 лет Американский университет в Центральной Азии является флагманом гуманитарного образования в регионе. Наш подход к обучению кардинально отличается от системы, принятой в учебных заведениях республики, да и всего региона. Для нас образование это не односторонний процесс передачи знаний от преподавателя к студенту, это совместная работа, увлекательное исследование, в ходе которого студенты и преподаватели вместе формулируют вопросы и ищут на них ответы. Такой подход имеет множество неоспоримых преимуществ, основополагающим из которых является пробуждение в учащихся подлинного интереса к получению знаний, к развитию.

Три года назад мы еще больше расширили доступ к качественному образованию, открыв при Американском университете колледж для ребят, окончивших 9 класс — Инновационный колледж АУЦА (Technical School of Innovation — TSI). Значение этого события сложно переоценить: с появлением TSI AUCA у развитой молодежи Кыргызстана появилась не просто альтернатива школьному образованию и обычным колледжам, которые готовят технарей-исполнителей. У старшеклассников появилась возможность обучаться по программам, эквивалентным программам передовых университетов мира.

Особую важность этот факт приобретает в свете того, что современная молодежь является значительно более продвинутой, нежели еще 15-20 лет назад. Вкупе со стремительными технологическими трансформациями, которые происходят сегодня, это требует совсем иных подходов к образованию, нежели то, что предлагает устаревшая система школьного обучения.

Мы живем в крайне динамичную эпоху, когда целые профессии видоизменяются до неузнаваемости и даже исчезают. Никто доподлинно не знает, какие профессии будут актуальны в мире всего через 5-10 лет, когда вы, сегодняшние школьники, станете молодыми специалистами. Учебные программы, применяемые в

АУЦА и в Инновационном колледже, разработаны специально для того, чтобы наши выпускники были востребованы на рынке труда и сегодня, и через 5, 10, 20 лет.

Помимо навыков и умений, связанных с той или иной специальностью, мы даем нашим студентам знания об универсальных методах решения проблем, учим их ориентироваться и находить выходы в самых нестандартных ситуациях. Мы развиваем в ребятах критическое, рациональное мышление, логику, прививаем умение работать с большими объемами информации и обучаться на протяжении всей жизни. Мы обучаем наших воспитанников тому, что все в этом мире взаимосвязано — начиная от знаний, которые они получают в рамках той или иной учебной дисциплины, и заканчивая тем простым фактом, что успешность каждого из нас напрямую зависит от успешности нашего окружения, общества, страны, региона... . Мы доносим до ребят необходимость быть ответственным не только за собственную жизнь, но и за судьбы сообществ, в которых они живут. В конце концов, мы учим каждого из наших студентов тому, как стать поистине счастливым.

А вот как мы обучаем наших студентов, вы можете узнать из книги, которую вы держите в руках. Она является результатом работы профессоров АУЦА и представляет собой живой пример тех нестандартных подходов, которые используют наши преподаватели в процессе учебы. С ними изучение даже такой, казалось бы, сухой дисциплины как математика, на деле оказывается захватывающим и полным творчества!

Желаю Вам стать успешными и счастливыми, внести свой в вклад в то, чтобы жизнь в Кыргызской Республике и во всем мире стала лучше!

ВВЕДЕНИЕ

Многие часто задают вопрос: «Для чего нужно изучать математику?» На этот вопрос можно дать много ответов. Некоторые из них:

- Для того чтобы сдать экзамен.
- Для того чтобы научиться использовать математические методы для решения проблем, возникающих в экономике, социологии, психологии, политологии и других областях жизни.
- Изучение математики – один из наилучших методов развития логического мышления. А умение мыслить логически полезно всем, начиная от малых детей и заканчивая президентами.
- Для того чтобы получить Нобелевскую премию. Например, известно что большая часть работ удостоенных Нобелевской премии по экономике (Д.Хикс, Р.Солоу, В.Леонтьев, Л.Канторович, П.Самуэльсон, … .), связана с использованием математических методов.

Для того чтобы лишний раз подчеркнуть полезность использования математических методов приведем отрывок из знаменитой книги Л. Соловьева «Повесть о Ходже Насреддине».

… Именно так и решил маленький Насреддин: если бухарские жители не умеют сами быть милосердными — надо их вынудить к этому.

Определив задачу, он тем самым определил и русло своих дальнейших размышлений. Они сводились к поискам такой игры, в которой он имел бы перевес над бухарцами. Чтобы не затруднять себя раздумьями о многих тысячах бухарских, жестокосердных жителях, он счел полезным слить в своем воображении всех вместе, в одного Большого Бухарца.

Дело упростилось: думать об одном Бухарце, хотя и очень большом, оказалось много легче. ...

Рассуждения маленького Насреддина являются ярким примером использования математического моделирования ситуации, хотя, скорее всего, он сам об этом не знал.

<u>Итак, математическое моделирование явления — это пересказ этого явления языком чисел, функций, уравнений, неравенств и так далее. Также, как и каждый пересказ, модель может быть</u>

хорошей или плохой. Хорошая модель — это модель, которая позволяет, затратив относительно мало усилий довольно много узнать об интересующих нас сторонах изучаемого явления.

В данной работе мы, в основном, будем говорить о моделировании на языке линейной алгебры и аналитической геометрии. Возможно, не все об этом знают, но все мы занимались этим, начиная с 1–го класса, решая задачи на составление уравнений. Для того чтобы подогреть интерес читателей, мы приводим две занимательные задачи, которые Вы сможете решить, усвоив методы, описываемые в этой работе.

Задача 1

ИСТОРИЯ ИЗ «КАВКАЗСКОЙ ПЛЕННИЦЫ».

Если б я был султан,
То б имел трех жен …

Султану нужно полтора часа, для того чтобы спокойно посмотреть футбол. С этой целью он решил обязать своих жен погладить халаты, обшить платки и заштопать носки.

Известно, что Зульфия гладит халат за 15 минут, обшивает платок за 2 минуты, штопает носок за 7 минут. Соответствующие данные Гулии: 12, 3, 9; Фатьмы:18, 1, 5.

Задумавшись над тем, сколько халатов, платков и носков нужно выдать каждой жене, он понял, что это довольно сложная задача. (Султан понимает, что для сохранения «хорошей погоды» в доме все жены должны получить одинаковые задания.) Вызванный на помощь мудрый визирь сумел найти решение проблемы. Султан, не отвлекаясь, посмотрел игру, а так как плюс ко всему его команда выиграла, он получил большое удовольствие.

Перед следующей игрой Султан решил действовать по оправдавшей себя схеме. Но в этот момент к Султану подошла его любимая жена Зульфия и попросила разрешения на 10–минутный перерыв во время работы. Отказать ей, Султан, конечно же, не смог и возникла необходимость пересмотреть задания.

Был вызван визирь, который, о ужас, сказал, что он не может решить эту задачу. Что тут началось! Зульфия кричала, что визирь делает это нарочно. Он давно уже задумал сделать любимой женой султана Гулию — свою родственницу. Султан сказал, что он немедленно бы казнил визиря, если б не знал, что Европейский парламент и ряд других, столь же уважаемых организаций, против смертной казни.

Затем вмешались остальные жены, затем тещи, …

Вы, конечно, представляете, какой поднялся шум. Султану было не до футбола.

Визиря от казни спасло только то, что он, когда все более или менее успокоились, сказал, что дело не в уменьшении времени для Зульфии. Эта задача будет неразрешима и в случае, когда требуется уменьшить время работы любой жены, и более того: если б даже понадобилось не уменьшить время для Зульфии, а увеличить — все равно задача остается неразрешимой.

На следующий день, остыв, Султан и Зульфия пригласили к себе визиря и попросили объяснить ситуацию. Визирь провел с ними несколько занятий по линейной алгебре, после которых выяснилось, что решение задачи сводится к нахождению решения системы линейных алгебраических уравнений, а для некоторых систем решение невозможно найти даже под угрозой смертной казни.

Зульфия, к ее чести, оказалась способной ученицей. Она, помимо того, что извинилась и достойно наградила визиря, поняла, что для того, чтобы побыть рядом с любимым мужем 10 лишних минут, нужно работать более интенсивно в остальное время. Она определила, что все будет в порядке, если она будет гладить халат за 13 минут, обшивать платок за 2 минуты и штопать носок за 6 минут.

В этой истории, кажется, наступил «happy end»: Султан спокойно смотрит футбол, Зульфия остается любимой женой, а нам остается только радоваться, глядя на них.

К сожалению, мир, который установился во дворце, не нравится одной из тещ — матери Фатьмы. Она давно мечтает увидеть свою дочь в роли любимой жены. Поэтому, обдумав слова визиря во время скандала, она подговорила дочь пойти и предложить поработать для любимого мужа больше, чем 90 минут.

При этом она сказала

– Ты заработаешь дополнительные очки в глазах мужа как прилежная жена, и при этом тебе не придется перерабатывать, так как задача увеличения времени все равно неразрешима.

Можете представить себе разочарование Фатьмы, когда через некоторое время она получила задание Султана погладить 4 халата, обшить 2 платка и заштопать 4 носка. Самое обидное для нее заключалось в том, что, как она узнала потом, задачу решила сама Зульфия, не прибегая к помощи визиря.

Мать Фатьмы не учла того, что Зульфия стала работать быстрее.

А Зульфия в очередной раз доказала, что долгое время любимой женой может быть только умная женщина.

Задача 2

Умирая, Евклид сообщил своим детям, что закопал 800 золотых монет – по 100 в каждой вершине квадрата. На первую вершину можно попасть, сделав 20 шагов на запад и 10 шагов на юг от старой яблони, на вторую: сделав 40 шагов на восток и 30 шагов на юг от старой яблони. В 2–х указанных местах, дети действительно обнаружили по 100 монет, после этого нашли еще два клада и на этом остановились, решив, что отец ошибся – так как у квадрата четыре вершины, может быть закопано только 400 монет. Проясните ситуацию и укажите точки, в которых закопаны монеты.

Мы уверены, что после изучения соответствующего материала в данной работе, Вы сумеете перевести эти истории на язык математики и объяснить события, которые в них происходили.

Надеемся, что эта работа окажется полезной, как для тех, кто только начинает изучать высшую математику, экономику, бизнес, социологию, … , так и для искушенных в этих областях специалистов.

Благодаря этой книге можно усвоить знания, которые получают студенты АУЦА, изучающие экономику, бизнес, … во время первого семестра. При работе с книгой рекомендуем, внимательно прочитать ЗАДАЧУ и ее решение, и прорешать сопровождающие ее упражнения. Одно из них предназначено для работы в классе, С; другое — дома, Н. После изучения отдельной темы, которая оформлена в виде параграфа, желательно закрепить полученные знания, прорешав итоговые задания в конце параграфа. После изучения нескольких тем Вы можете проверить свои знания, выполнив контрольную или самостоятельную работу, расположенную в соответствующем разделе книги. Будет не лишним отметить, что ко всем упражнениям и проверочным работам в конце книги приведены ответы и указания.

Мы хотим закончить введение и начать изложение основного материала с выражения благодарности родным, коллегам, ученикам за постоянную поддержку, Американскому Университету в Центральной Азии за создание условий для работы и издание этой книги.

§1. ВВЕДЕНИЕ В СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

При изучении математики, к сожаленью, очень часто возникает вопрос: «А зачем это нужно?» Существует много вариантов ответа. Один из них дал великий ученный Г. Галилей. Он говорил: «*Природа говорит языком математики».* Поэтому важно понимать этот язык. При этом желательно, чтобы процесс обучения был интересным. Этому способствуют задачи, в которых на математическом языке описываются явления из окружающей нас действительности. Во многих таких задачах используются системы линейных алгебраических уравнений. Их мы начнем изучать в этом параграфе.

1.1. Вырожденные системы

Задача

Анара купила 17 блокнотов за 306 сомов. Эркингуль купила 13 блокнотов и 19 ручек за 671 сом. Определите цену блокнота и цену ручки.

Решение

Обозначим цену блокнота *n,* цену ручки *p*, и получим систему

$$\begin{cases} 17n = 306, \\ 13n + 19p = 671. \end{cases}$$

Системы такого вида называются вырожденными и решаются очень просто: во–первых, нужно решить уравнение, содержащее только одну неизвестную, а затем, использовать найденное значение во–втором уравнении.

Так, из первого уравнения системы: $n = 306/17= 18$. Тогда, $13\cdot 18 + 19p = 671$. Поэтому, $19p = 671 - 234$ и $p = 437/19 = 23$.

Итак, мы определили, что цену блокнота 18 сомов, а цена ручки 23 сома.

Упражнение 1.1

C. Арстан купил 7 кисточек и 11 альбомов на 732 сома. Чинара купила 15 альбомов на 645 сомов. Определите цену кисточки и цену альбома.

Н. Елена купила 9 банок с краской на 657 сомов. Сергей купил 5 банок с краской и 29 рулонов обоев на сумму 6542 сома. Определите цену банки с краской и цену рулона обоев.

1.2. Метод подстановки

Задача

Айжан купила 17 комбинезонов и 8 рубашек за 5310 сомов. При этом комбинезон стоил на 55 сомов больше, чем рубашка Сколько сомов заплатила Гульнура за 7 комбинезонов и 3 рубашки в том же магазине?

Решение

Обозначим цену комбинезона n, цену рубашки s, и получим систему $\begin{cases} 17n + 8s = 5310, \\ n - s = 55. \end{cases}$ Теперь выразим значение n из второго уравнения системы и подставим в первое:

$$\begin{cases} 17n + 8s = 5310, \\ n = 55 + s, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 17(55 + s) + 8s = 5310, \\ n = 55 + s, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 25s = 4375, \\ n = 55 + s. \end{cases}$$

В результате получим вырожденную систему. Тогда, из первого уравнения системы: $s = 4375/25=175$. Отсюда, $n =55+175=230$. Таким образом выяснилось, что за 7 комбинезонов и 3 рубашки Гульнура заплатила: $7n + 3s = 7 \cdot 230 + 3 \cdot 175 = 2135$ сомов.

Способ, которым решена задача, называется методом подстановки.

Упражнение 1.2

С. Айбике получила 71 «пятерку» и «четверку». Причем, если бы она получила на одну «пятерку» больше, то количество «четверок» было бы в три раза меньше, чем количество «пятерок». Определите сколько «пятерок» и «четверок» получила Айбике.

Н. Периметр прямоугольника 97 сантиметров. Длина на 5 см больше удвоенной ширины. Определите площадь этого прямоугольника.

1.3. Метод «сложения–умножения». 1

Задача

Общий вес 7 быков и 23 овец в стаде Кошоя составляет 2425 кг. После того, как он продал 10 овец и купил еще 7 быков, общий вес его стада составил 3299 кг. Чему равен средний вес быка и средний вес овцы в стаде Кошоя?

Решение

Обозначим средний вес быка через b, а средний вес овцы через s, и получим систему $\begin{cases} 7b + 23s = 2425, \\ 14b + 13s = 3299. \end{cases}$ Конечно, эту систему можно решить методом подстановки, но соответствующие выражения будут довольно громоздкими и неудобными для расчетов. В то же время многих неудобств можно избежать, если использовать метод «сложения–умножения» или, как его еще называют, метод Гаусса.

В этом случае для систем используется следующее свойство:

Решения системы не изменятся, если ее уравнение заменить суммой этого уравнения с другим уравнением системы, умноженным на любое число.

Отметим, что в данной системе коэффициенты при ***b*** являются “близкими родственниками”. Приняв это во внимание, умножим первое уравнение системы на (–2) и добавим ко второму: $\begin{cases} 7b + 23s = 2425, \\ -33s = -1551. \end{cases}$ В результате имеем вырожденную систему. Поэтому: $s = 1551/33 = 47$ и $7b+23\cdot47 = 2425 \Leftrightarrow b = 192$. Итак, средний вес быка в стаде 192 кг, средний вес овцы 47 кг.

Упражнение 1.3

С. Общий рост 8 девочек и 9 мальчиков 2755 сантиметров. После того, как из этой группы вышли 4 девочки и добавились два мальчика, общий рост группы составил 2489 см. Чему равен средний рост девочки и средний рост мальчика в этой группе?

Н. Айзада купила 27 блокнотов и 8 ручек за 232 сома. В этом же магазине Гульмира купила 9 блокнотов и 14 ручек за 253 сома. Сколько сомов заплатила Эльнура за 11 блокнотов и 3 ручки в этом магазине?

1.4. Метод «сложения–умножения». 2

Задача

Пусть нам известно, что 2 тонны муки были перевезены в грузовике в 20 маленьких и 25 больших мешках. Этой информации недостаточно для определения веса отдельного мешка, так как эта задача имеет много решений. Например, если вес маленького мешка равен 10 кг, то вес большого мешка: $(2000 - 20\cdot10):25 = 72$ кг; если вес маленького мешка составляет 30 кг, то вес большого: $(2000 - 20\cdot30):25 = 56$ кг и так далее. Это обычно происходит, когда количество неизвестных (здесь, это вес большого мешка и вес маленького мешка) больше, чем количество уравнений. Поэтому, чтобы получить точный ответ, нужна дополнительная информация. Это может быть информация о весе мешка, о другом транспорте и тому подобное. Допустим, стало известно, что второй грузовик перевез 3 тонны муки в 38 маленьких и 35 больших мешках. Используя эту информацию, мы можем получить систему уравнений, решить ее и дать ответ: вес маленького мешка равен 20 кг, а большого — 64 кг. Если у нас есть информация о третьем, четвертом и т.д. грузовиках, ее можно использовать для проверки. Например, нам сообщили, что третий грузовик перевез 2,5 тонны муки в

10 маленьких и 40 больших мешках. Используем данные о весе мешков, полученные выше: $10 \cdot 20 + 40 \cdot 64 = 2760$. Итак, вместо 2500 получили 2760. Это означает, что полученная информация содержит ошибку.

Рассмотрим подробнее решение задачи с двумя грузовиками. Обозначим через x вес маленького мешка, y — большого мешка, и получим систему двух уравнений: $\begin{cases} 20x + 25y = 2000, \\ 38x + 35y = 3000. \end{cases}$ Для того чтобы уравнять коэффициенты при x в уравнениях системы, умножим первое уравнение на 38, второе на 20, и получим $\begin{cases} 760x + 950y = 76000, \\ 760x + 700y = 60000. \end{cases}$ Теперь вычтем второе уравнение системы из первого: $250y = 16000$. Отсюда, $y = 64$. Подставив найденное значение в первое уравнение исходной системы, получим $20x+25 \cdot 64=2000.$ Поэтому, $x = 20.$ Для проверки, можно подставить найденные значения $x = 20$ и $y = 64$ во второе уравнение системы, и убедиться в том, что найдено верное решение.

Упражнение 1.4

С. В магазине 13 кепок и 18 шляп можно купить за 5832 сома, а 22 кепки и 31 шляпу — за 9995 сомов. Сколько стоит кепка?

Н. Компания производит напитки Альфа и Бета. Для производства 1 литра напитка «Альфа» требуется 12 минут работы специального оборудования и 5 г концентрата. Для напитка Бета требуются 18 минут и 8 г, соответственно. Известно, что компания использовала 90 часов работы спец оборудования и 2,32 кг концентрата. Сколько литров каждого напитка было произведено?

1.5. Введение в правило Крамера. 1

Метод решения систем, использованный в предыдущем пункте, можно формализовать. Давайте сделаем это. Для этого рассмотрим систему двух линейных уравнений от двух переменных в общем виде:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases} \qquad (1.1)$$

Для того чтобы решить систему (1.1), умножим первое уравнение на a_{21}, второе — на a_{11}, и уравняем коэффициенты при x_1:

$\begin{cases} a_{21}a_{11}x_1 + a_{21}a_{12}x_2 = a_{21}b_1, \\ a_{11}a_{21}x_1 + a_{11}a_{22}x_2 = a_{11}b_2, \end{cases}$ Теперь вычтем первое уравнение из второго: $(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})x_2 = a_{11}b_2 - a_{21}b_1$. Тогда,

$$x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}. \qquad (1.2)$$

Для нахождения x_1 поступим подобным образом: умножим 1–ое уравнение на a_{22}, 2–ое — на a_{12}, и приравняем коэффициенты при x_2: $\begin{cases} a_{22}a_{11}x_1 + a_{22}a_{12}x_2 = a_{22}b_1, \\ a_{12}a_{21}x_1 + a_{12}a_{22}x_2 = a_{12}b_2. \end{cases}$ Вычтем второе уравнение системы из первого: $(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})x_2 = a_{22}b_1 - a_{12}b_2$. Отсюда,

$$x_1 = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}. \qquad (1.3)$$

Формулы (1.2), (1.3) справедливы, если $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \neq 0$.

Обратите внимание на то, что в знаменателях формул (1.2), (1.3) стоят одинаковые выражения, составленные из коэффициентов системы (1.1). Это число называется определителем матрицы коэффициентов системы (1.1) $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ и обозначается $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$. Иногда используются слово детерминант и обозначения Δ или det. Выражение $det\ A$ означает определитель матрицы A.

Отметим, что выражения $a_{11}b_2 - a_{21}b_1;\ a_{22}b_1 - a_{12}b_2$ в формулах (2), (3) являются определителями матриц

$\begin{pmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{pmatrix}$, соответственно. В итоге, получился частный случай правила, называемого правилом Крамера:

Если $\Delta \neq 0$, решение системы (1.1) можно получить по формулам:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}. \tag{1.4}$$

Здесь Δ_k являются определителями матриц, полученных из матрицы коэффициентов системы (1.1) путем замены столбца с номером k (столбца коэффициентов неизвестной x_k) на столбец свободных членов.

Например, в предыдущей задаче с двумя грузовиками

$$\Delta = \begin{vmatrix} 20 & 25 \\ 38 & 35 \end{vmatrix} = 20 \cdot 35 - 38 \cdot 25 = -250;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2000 & 25 \\ 3000 & 35 \end{vmatrix} = 2000 \cdot 35 - 3000 \cdot 25 = -5000;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 20 & 2000 \\ 38 & 3000 \end{vmatrix} = 20 \cdot 3000 - 38 \cdot 2000 = -16000;$$

Тогда, из формул (1.4): $x_1 = –5000/(–250) = 20$;

$x_2 = –16000/(–250) = 64$.

Упражнение 1.5

Решите задачи из упражнения 1.4, используя правило Крамера.

1.6. Введение в правило Крамера. 2

Чтобы показать, что использование метода «подстановки» или «умножения–сложения» не всегда рационально, мы предлагаем рассмотреть следующую задачу.

Задача

Саадат продает сладости и печенье. В первый день она продала 17 килограммов конфет и 22,5 кг печенья. Во второй день она продала 25,2 кг конфет и 19 кг печенья. Определить цены конфет и печенья, зная, что выручка в первый день *составила 9210 сомов, во второй день выручка была равна 10868 сомам.*

Решение

Нетрудно увидеть, что ответ можно получить, решив систему $\begin{cases} 17a + 22{,}5b = 9210, \\ 25{,}2a + 19b = 10868. \end{cases}$

Конечно, эту систему можно решить способом, который вам хорошо известен: выразить одну из переменных из первого уравнения системы и подставив во вторую, получить линейное уравнение с одним неизвестным. При этом придется столкнуться с довольно громоздкими преобразованиями. В то же время, с помощью калькулятора, эта система легко решается по правилу Крамера. Итак, вычисляем определитель матрицы коэффициентов системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 17 & 22{,}5 \\ 25{,}2 & 19 \end{vmatrix} = 17 \cdot 19 - 25{,}2 \cdot 22{,}5 = -244.$$

Далее, вычислим определители, задаваемые правой частью системы:

$$\Delta_a = \begin{vmatrix} 9210 & 22{,}5 \\ 10868 & 19 \end{vmatrix} = 9210 \cdot 19 - 10868 \cdot 22{,}5 = -69540;$$

$$\Delta_b = \begin{vmatrix} 17 & 9210 \\ 25{,}2 & 10868 \end{vmatrix} = 17 \cdot 10868 - 25{,}2 \cdot 9210 = -47336.$$

Теперь, из правила Крамера: $D \cdot a = D_a$; $D \cdot b = D_b$, получим
$a = (-69540)/(-244) = 285$; $b = (-47336)/(-244) = 194$.

Таким образом, выяснилось, что килограмм конфет стоит 285 сомов, а килограмм печенья стоит 194 сомов.

Упражнение 1.6

С. Ольга купила 5 кг мяса и 8 кг картофеля за 1820 сомов. Если бы мясо было на 20% дороже, а картофель — на 10%, то было бы потрачено 2148 сомов. Сколько стоит мясо?

Н. Компания производит телевизоры Alpha и Beta из имеющихся комплектующих. При изготовлении одного телевизора Alpha 4,8 часа уходит на сборку и 2,7 часа на настройку. При изготовлении одного телевизора Beta 6,1 часа уходит на сборку и 3,3 часа на настройку. Сколько телевизоров каждой марки было изготовлено, если на сборку ушло 6949 часов, а на настройку — 3813 часов?

1.7. Другие методы. 1

Метод подстановки, метод Гаусса и метод Крамера наиболее часто используются при решении систем линейных алгебраических уравнений. Однако в некоторых случаях полезно использовать что–нибудь другое. Поэтому общая рекомендация — прежде чем приступить к решению задачи, подумайте немного.

Задача

Марина выбрала в книжном магазине четыре книги. Однако, подойдя к кассе, она обнаружила, что денег хватило только на три книги. Причем, если она откажется от первой книги, то ей придется заплатить 927 сомов, от второй — 904 сома, от третьей — 931 сом, от четвертой — 898 сомов. Сколько стоит каждая книга?

Решение

Обозначим цену первой книги f, второй — s, третьей — t, четвертой — r. Тогда получится система из четырех линейных уравнений с четырьмя неизвестными:

$$\begin{cases} s + t + r = 927; \\ f + t + r = 904; \\ f + s + r = 931; \\ f + s + t = 898. \end{cases}$$

На первый взгляд это ужасно — четыре уравнения, четыре неизвестные. Однако, если просто сложить все уравнения, то получится $3(f+s+t+r)=3660$. Следовательно, $f + s + t + r = 1220$. Теперь, последовательно вычитая из этого уравнения первое, второе, третье и четвертое уравнения системы, получим решение задачи: $f = 293$; $s = 316$; $t = 289$; $r = 322$.

Упражнение 1.7

С. Карим, Дания и Тариэль хотят узнать свой вес. Но, к сожалению, доступны только старые весы, на которых можно взвесить только предметы весом более 100 килограмм.

Поразмыслив, они нашли выход из ситуации: взвесились попарно, а затем по полученным результатам определили свои веса. Сколько весит каждый, если общий вес Карима и Дании составляет 125 кг, Карима и Тариэля — 139 кг, Дании и Тариэля — 122 кг?

Н. Есть четыре пакета сахара. Взвесив их во всех разных сочетаниях по три пакета, Алина получила следующие числа: 3007 г, 3000 г, 2997 г, 3005 г. Определите вес каждого пакета, а также средний вес этих пакетов.

1.8. Другие методы. 2

Задача

Валерия решила подарить блокноты, альбомы и тетради 27 ученикам 2А класса, 25 ученикам 2Б класса и 28 ученикам 2С класса. Если ученикам 2А класса подарят блокноты, 2Б – альбомы, 2С – записные книжки, то она потратит 3626 сомов. Если ученикам 2А класса подарят тетради, 2Б – блокноты, 2С – альбомы, то она потратит 3631 сом. Если ученикам 2А класса подарят альбомы, 2Б – тетрадки, 2С – блокноты, она потратит 3623 сома. Определите цену блокнота, альбома и тетради.

Решение

Обозначим цену блокнота n, альбома a, тетради b, получим систему из трех линейных уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} 27n + 25a + 28b = 3626; \\ 27b + 25n + 28a = 3623; \\ 27a + 25b + 28n = 3631. \end{cases}$$

Приняв во внимание коэффициенты при неизвестных, сложим все уравнения системы:

$27(n + b + a) + 25(n + b + a) + 28(n + b + a) = 3626 + 3631 + 3623 \Leftrightarrow 80(n + b + a) = 10880 \Leftrightarrow (n + b + a) = 136.$

В результате, можно избавиться от одной из переменных. Например, можно вычесть $27(n+b+a)=3672$ из первого уравнения системы и $25(n+b+a)=3400$ — из второго. Тогда:

$$\begin{cases} -2a + b = -46, \\ 3a + 2b = 223. \end{cases}$$ Получилась система, которую нетрудно решить. Используем метод Крамера. Определитель матрицы коэффициентов: $\Delta = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -2 \cdot 2 - 3 \cdot 1 = -7.$ Далее,

$$\Delta_a = \begin{vmatrix} -46 & 1 \\ 223 & 2 \end{vmatrix} = -315\,; \ \Delta_b = \begin{vmatrix} -2 & -46 \\ 3 & 223 \end{vmatrix} = -308\,.$$

Следовательно, $a = -315/(-7) = 45;$ $b = -308/(-7) = 44.$ Затем, из уравнения $n + b + a = 136$, получим $n = 47.$

Упражнение 1.8

Решите системы уравнений:

C. $\begin{cases} 17x + 19y + 14z = 1936; \\ 17z + 19x + 14y = 1557; \\ 17y + 19z + 14x = 1507. \end{cases}$ **H.** $\begin{cases} 311x + 189y = 26586, \\ 189x + 311y = 23414. \end{cases}$

1.9*. Другие методы. 3

Как было уже сказано, умение решать линейные системы является очень важным в процессе математического моделирования различных явлений. При этом, полезность этого умения не ограничивается чисто линейными системами. Простейший случай такого рода приведен в данном пункте.

Задача

Найдите положительные решения системы уравнений:

$$\begin{cases} 5 / x^2 + 3 \cdot 2^y = 44, \\ 7 / x^2 - 5 \cdot 2^y = -12. \end{cases}$$

Решение

На первый взгляд, что–то непонятное. Но если чуть–чуть подумать и ввести обозначения: $a = 1/x^2;$ $b = 2^y$, то получится линейная система $\begin{cases} 5a + 3b = 44, \\ 7a - 5b = -12. \end{cases}$ Ее решение: $a = 4;$ $b = 8.$

То есть, $4 = 1/x^2$; $8 = 2^y$. Таким образом, $x = 1/2$; $y = 3$.

Упражнение 1.9

Решите системы уравнений:

С. $\begin{cases} 11x^{1/2} - 7y^{2/3} = 3, \\ -17x^{1/2} + 8y^{2/3} = -30. \end{cases}$ **Н.** $\begin{cases} -9/(x-2) + 10 \cdot 5^y = -34, \\ 0{,}4/(x-2) + 7 \cdot 5^y = 3. \end{cases}$

Итоговые задания

1–6. Решите системы уравнений:

1) $\begin{cases} -3x + 5y = 26, \\ 8x - 7y = -44. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x - 3y + 1 = 0, \\ 3x + 4y - 2 = 0. \end{cases}$

3) $\begin{cases} 21x + 25y = 2020, \\ 28x + 33y = 2672. \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 3x - 4y - 1{,}3 = 0, \\ 4x + 5y = 10. \end{cases}$

5) $\begin{cases} 32x + 51y = 667, \\ 18x - 23y = -90. \end{cases}$ 6) $\begin{cases} -71x + 35y = -77, \\ 28x - 18y = -55. \end{cases}$

7. Алишер решил купить блокноты для 23 девочек и альбомы для рисования для 17 мальчиков из детского дома. Но у него не было необходимых 66,9 долларов. Поэтому он купил альбомы для девочек и блокноты для мальчиков, потратив 65,1 доллара. Определите цену альбома и цену блокнота.

8. Ислом планирует приобрести ручки, линейки и тетради для 17 учеников 1А класса, 18 учеников 1Б класса и 15 учеников 1В класса. Если каждому ученику 1А класса подарят ручку, 1Б — линейку, 1В — тетрадь, то Ислом потратит 16,61 доллара. Если каждому ученику 1А класса подарят тетрадь, 1Б — ручку, 1В — линейку, то он потратит $16,58. Если ученикам 1А класса подарят линейки, 1Б — тетради, 1В — ручки, то Ислом потратит 16,81 доллара. Определите цену ручки, линейки и блокнота.

9. Найдите положительные решения системы уравнений

$$\begin{cases} 3x^4 + 4/(y-3) = 50, \\ x^4 - 8/(y-3) = 76. \end{cases}$$

§2. ВЕКТОРЫ. ВЕКТОРЫ В ПРЯМОУГОЛЬНОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

2.1. Определения

Скаляр — это величина, выражаемая одним числом. Примерами скаляра являются вес животного, температура воздуха, цена продукта и так далее.

Вектор — это величина, которая определяется несколькими скалярами. Другими словами, вектор можно определить как величину, имеющую длину и направление.

Математики говорят, что вектор — это направленный отрезок. Векторы в окружающем нас мире встречаются повсюду. Мы регулярно используем векторы и очень часто даже не задумываемся об этом. Например, знаменитая басня Крылова «Лебедь, Рак и Щука» является прекрасной иллюстрацией правила, согласно которому разнонаправленные векторы нейтрализуют друг друга. Еще одно утверждение, что все будет хорошо, если желания совпадают с возможностями, на векторном языке можно трактовать как утверждение о том, что сумма двух векторов имеет наибольшую длину, если направления векторов совпадают.

Векторы широко используются в физике. В то же время использование декартовой системы координат делает векторы очень полезными в других областях науки. Вектор однозначно определяется двумя точками: началом и концом. Обозначение $\overline{AB}$ говорит нам, что вектор $\overline{AB}$ начинается в точке A и заканчивается в точке B. Для определения координат вектора нужно вычесть координаты начальной точки из соответствующих координат конечной точки.

Задача

Определите координаты векторов $\overline{AB}$ *и* $\overline{BA}$, *определённых точками* $A(7, -1)$ *и* $B(2, 6)$.

Решение

Как уже упоминалось, для определения координат вектора нужно вычесть координаты начальной точки A из соответствующих координат конечной точки B:

$\overline{AB}$ = (2 – 7; 6 – (–1)) = (–5; 7).

Вектор $\overline{BA}$ = (7 – 2; –1 – 6) = (5; –7). Вектор $\overline{BA}$ — вектор, который начинается в точке B и заканчивается в точке A, называется противоположным к вектору $\overline{AB}$. Нетрудно понять, что полученный выше результат справедлив и в общем случае: для получения координат противоположного вектора достаточно изменить знаки координат исходного вектора. В результате, естественным образом, получаем обозначение: вектор, противоположный вектору $\overline{a}$, обозначается $-\overline{a}$.

Упражнение 2.1

С. Заданы точки *E(–2, 1), F(3, 5), G(1, –2)*. Определите координаты векторов $\overline{EF}, \overline{FE}, \overline{EG}, \overline{FG}$.

Н. Заданы точки *K(–3, –1), L(2, 4), M(3, –3)*. Определите координаты векторов $\overline{KL}, \overline{LM}, \overline{ML}, \overline{KM}$.

2.2. Сумма и разность векторов

Вернемся к упражнению 2.1.С. Для наглядности нарисуем соответствующий рисунок 2.1.

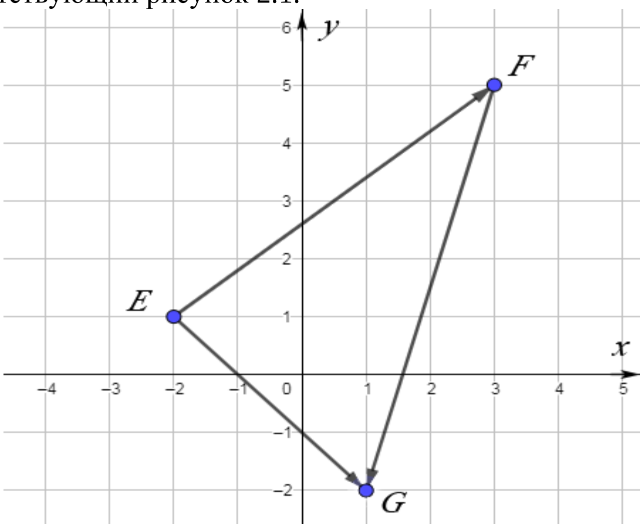


Рисунок 2.1

Вектор $\overline{EG}$ означает перемещение из точки E в точку G. Для иллюстрации, предположим, что мы описываем перемещение девушки, которая сначала прошла из точки E в F, а потом, из точки F в G. В итоге, она переместилась из точки E в точку G, что выражено вектором $\overline{EG}$.

Вышесказанное иллюстрирует правило сложения векторов.

Для того чтобы сложить два вектора $\overline{a}$ и $\overline{b}$, нужно в конечной точке первого расположить начало второго и соединить начальную точку первого вектора с конечной точкой второго вектора. Тогда, вектор, являющийся третьей стороной полученного треугольника, называется суммой векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ и обозначается $\overline{a} + \overline{b}$.

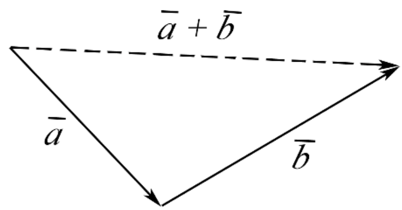


Рисунок 2.2

Это правило треугольника при сложении векторов.

Чтобы сложить несколько векторов, вам нужно сделать следующее: найти вектор, который является суммой первых двух векторов, и добавить к нему третий и так далее.

Итак, $\overline{EF} + \overline{FG} = \overline{EG}$. Замечательный результат получится, если мы найдем сумму координат векторов $\overline{EF}$ и $\overline{FG}$: *(5; 4)* и *(–2; –7),* и сопоставим результат с координатами вектора $\overline{EG}$, равными *(3; –3)*: *(5; 4) + (–2; –7) = (3; –3).* Этот результат иллюстрирует правило сложения векторов:

Координаты вектора, являющегося суммой векторов, равны сумме соответствующих координат слагаемых.

После того как мы научились складывать вектора, операция их вычитания становится очень простой.

Для того чтобы вычесть вектор $\overline{b}$ от вектора $\overline{a}$, достаточно сложить вектора $\overline{a}$ и $-\overline{b}$ (вектор, противоположный к вектору $\overline{b}$).

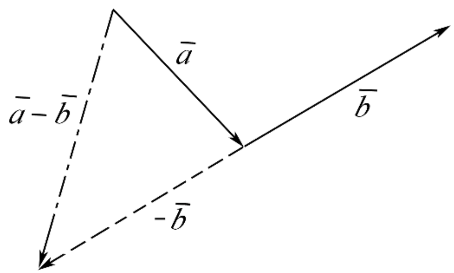


Рисунок 2.3

Итак, если векторы заданы своими координатами, для того чтобы сложить (вычесть) векторы, достаточно сложить (вычесть) соответствующие координаты.

Задача

1) Заданы векторы $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$. Выразить следующие векторы через заданные: *a)* $\overline{DC}$; *b)* $\overline{AD}$; *c)* $\overline{AC}$; *d)* $\overline{DB}$.

2) Заданы точки *A(7, –1), B(2, 6), C(6, 6), D(8, 4).*

Найти координаты векторов: $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ и *a)* $\overline{DC}$; *b)* $\overline{AD}$; *c)* $\overline{AC}$; *d)* $\overline{DB}$.

3) Сравнить результаты пунктов 1 и 2.

Решение

1) Задачу будет проще решить, если использовать рисунок. (Мы используем координаты точек из пункта 2, но это не влияет на решение. Можно рассмотреть любой четырехугольник.)

a) Вектор $\overline{DC}$ противоположен $\overline{CD}$. Поэтому, $\overline{DC} = -\overline{CD}$.

b) Из точки *A* можно попасть в точку *D*, последовательно проходя по сторонам *AB, BC, CD* или по стороне *AD.* Таким образом,

$\overline{AD} = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD}$.

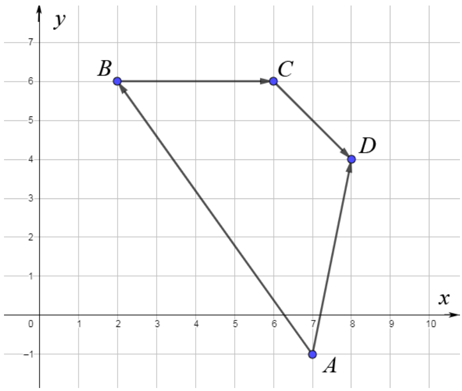


Рисунок 2.4

c) Из точки A, можно попасть в точку C, последовательно проходя по сторонам AB, BC или по диагонали AC. То есть, $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$.

d) Из точки D можно попасть в точку B, последовательно проходя по сторонам DC, CB, то есть по векторам, противоположным векторам $\overline{CD}$ и $\overline{BC}$. Поэтому, $\overline{DB} = -\overline{CD} + (-\overline{BC})$.

2) Для того чтобы определить координаты вектора от координат конечной точки нужно отнять соответствующие координаты начальной точки. Следовательно,

$\overline{AB}(-5;\ 7)$, $\overline{BC}(4;\ 0)$, $\overline{CD}(2;\ -2)$. Тогда,

a) $\overline{DC}(-2;\ 2)$; *b)* $\overline{AD}(1;\ 5)$; *c)* $\overline{AC}(-1;\ 7)$; *d)* $\overline{DB}(-6;\ 2)$.

3) Для того чтобы продемонстрировать, что в пунктах 1 и 2 получены одни и те же результаты, выразим их в координатной форме:

a) $\overline{DC} = -\overline{CD} \Leftrightarrow (-2;\ 2) = -(2;\ -2)$;

b) $\overline{AD} = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} \Leftrightarrow (1;\ 5) = (-5;\ 7) + (4;\ 0) + (2;\ -2)$;

c) $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC} \Leftrightarrow (-1;\ 7) = (-5;\ 7) + (4;\ 0)$;

d) $\overline{DB} = -\overline{CD} + (-\overline{BC}) \Leftrightarrow (-6;\ 2) = (-2;\ 2) + (-4;\ 0)$.

Непосредственное вычисление подтверждает верность равенств. Так, для примера, в случае b) имеют место верные равенства

$1 = -5 + 4 + 2$ и $5 = 7 + 0 + (-2)$.

Упражнение 2.2

C. 1) Заданы точки: *E(–2, 1), F(3, 5), G(1, –2), H(0, –2), I(–1, –1).* Нарисуйте вектора $\overline{EF}$, $\overline{FG}$, $\overline{GH}$, $\overline{HI}$ и выразите через них следующие вектора: *a)* $\overline{EG}$; *b)* $\overline{FI}$; *c)* $\overline{GF}$; *d)* $\overline{EI}$.

2) Найдите координаты векторов: $\overline{EF}$, $\overline{FG}$, $\overline{GH}$, $\overline{HI}$, а потом

a) $\overline{EG}$; *b)* $\overline{FI}$; *c)* $\overline{GF}$; *d)* $\overline{EI}$.

3) Сравнить результаты пунктов 1 и 2.

H. 1) Заданы точки: *K(– 4, 2), L(1, 3), M(3, –3), N(1, –2), O(–4, 5).* Нарисуйте вектора $\overline{KL}$, $\overline{LM}$, $\overline{MN}$, $\overline{NO}$ и выразите через них следующие вектора:

a) $\overline{NM}$; *b)* $\overline{LN}$; *c)* $\overline{LO}$; *d)* $\overline{KO}$.

2) Найдите координаты векторов: $\overline{KL}$, $\overline{LM}$, $\overline{MN}$, $\overline{NO}$, а потом

a) $\overline{NM}$; *b)* $\overline{LN}$; *c)* $\overline{LO}$; *d)* $\overline{KO}$.

3) Сравнить результаты пунктов 1 и 2.

2.3. Свободный вектор

Математики договорились не различать два вектора, если один из них можно совместить с другим путем параллельного перемещения без изменения его величины. Такие векторы называются <u>свободными</u> векторами. Так, вектор, определенный точками *C(–5; 12)* и *D(–3; –3),* является тем же вектором, что и вектор, определенный точками *E(105; 120)* и *F(107; 105).*
(В этом несложно убедиться, определив координаты векторов *CD(2; –15)* и *EF(2; –15).*) Итак, договариваемся, что векторы одинаковой длины и направления не различаются. Понимаемые в этом смысле векторы обычно обозначаются маленькими латинскими буквами с черточкой наверху — например, $\overline{a}$. Чтобы подчеркнуть эту особенность векторов, их называют свободными. Важно отметить, что координаты свободного вектора можно рассматривать как координаты точки, в которой будет конец вектора, если его начало совмещено с началом координат.

Задача

1) Определить координаты точки G, если точка H имеет координаты (3, 17), а вектор $\overline{GH}$ *— координаты (5; –12).*

2) Определить координаты четвертой вершины параллелограмма KLMN, если известны координаты остальных точек: K(–3, 2), L(2, 4), M(1, –2).

Решение

1) Обозначим координаты точки *G*: $(x_G,\ y_G)$. Тогда, с одной стороны, по определению, вектор $\overline{GH}$ имеет координаты: $(3 - x_G;\ 17 - y_G)$ — от координат конца отнять координаты начала, с другой стороны, по условию его координаты *(5; –12)*. Вектора равны, если равны их координаты. Таким образом: $3 - x_G = 5;\ 17 - y_G = -12$. Отсюда получаем, что координаты точки *G* равны *(–2, 29)*.

2) Обозначим координаты точки *N* через $(x_N;\ y_N)$. Тогда, представляющий сторону *KL* вектор $\overline{KL}$ имеет координаты: *(2 – (–3); 4 – 2) = (5; 2).* Другая сторона параллелограмма *KLMN* — вектор $\overline{NM}$, имеет координаты: $(1 - x_N;\ -2 - y_N)$. Так как у параллелограмма противоположные стороны равны и параллельны, согласно определению свободного вектора: *(5; 2)* = $(1 - x_N;\ -2 - y_N)$. Отсюда получаем, что координаты точки *N* равны: *(–4, –4).*

Упражнение 2.3

С. 1) Определите координаты точки *T*, если точка *S* имеет координаты *(–5,2, 7)*, а вектор $\overline{ST}$ *(6; –1/7).*

2) Определите координаты четвертой вершины параллелограмма *PQRT* , если известны координаты остальных точек*: P(–5, –2), Q(–2, 3), R(1, –2).*

Н. 1) Определите координаты точки *P*, если точка *G* имеет координаты *(–9, 3)*, а вектор $\overline{GP}$ *(2; –11).*

2) Определите координаты четвертой вершины параллелограмма *ABCD*, если известны координаты остальных точек: *A(–6, –3), B(–4, 2), C(3, –5).*

2.4. Длина вектора

Задача

Пусть вектор $\overline{AB}$ *определен точками A(2, –1) и B(14, 4). Найти его длину.*

Решение

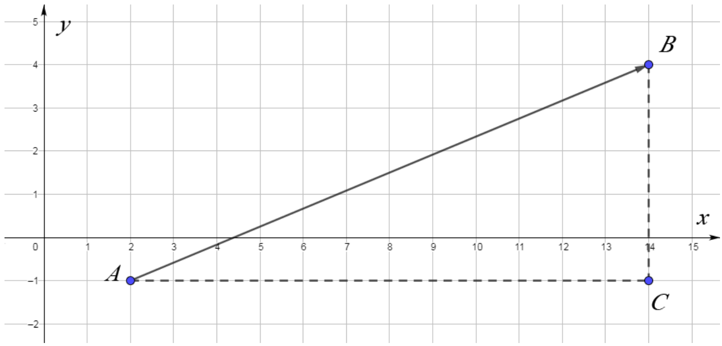


Рисунок 2.5

На рисунке видно, что длина вектора АВ является длиной гипотенузы треугольника *ABC*. Несложно понять, что так как катеты треугольника *AC* и *BC* параллельны осям координат, их длины равны разностям соответствующих координат. То есть $|AC| = |14 - 2| = 12$; $|BC| = |4 - (-1)| = 5$. Следовательно, по теореме Пифагора, $|AB| = \sqrt{12^2 + 5^2} = \sqrt{169} = 13$. Следует отметить, что числа 12 и 15 являются координатами вектора. Таким образом, проиллюстрировано правило:

Длина вектора равна корню квадратному из суммы квадратов его координат.

Упражнение 2.4

С. Найдите длину вектора $\overline{EF}$, определенного точками *E(–2, 1), F(3, –2).*

Н. Найдите длину вектора $\overline{AR}$, определенного точками *A(–4, 2), R(6, 3).*

2.5. Умножение вектора на число

Умножение вектора на положительное число соответственно меняет длину вектора и не меняют его направление. В то же время умножение вектора на отрицательное число меняет его направление на противоположное, одновременно меняя длину. Итак, чтобы умножить вектор на число *k*, нужно изменить его длину в *k* раз и: сохранить направление, если *k* положительно; изменить направление на противоположное, если *k* отрицательно. При использовании координатной записи, чтобы умножить вектор на число *k*, достаточно каждую координату умножить на *k*.

Задача

Пусть вектор $\overline{CD}$ *определен точками C(–1, 5) и D(3, 2). Требуется умножить его на (–3) и вычислить длину полученного вектора.*

Решение

Координаты $\overline{CD}$: $(3-(-1);\ 2-5)=(4;\ -3)$. Тогда вектор $-3\overline{CD}=(-12;\ 9)$. Искомую длину можно найти двумя способами. Первый способ: нужно вычислить длину вектора $\overline{CD}$: $\left|\overline{CD}\right|=\sqrt{4^2+(-3)^2}=\sqrt{16+9}=5$, а затем утроить результат: $5\cdot 3=15$. Второй способ: вычислить длину вектора $-3\overline{CD}$: $\left|-3\overline{CD}\right|=\sqrt{(-12)^2+9^2}=\sqrt{144+81}=15$.

Упражнение 2.5

C. Найти длину вектора $4\overline{UW}$, определенного точками *U(–2, 6), W(4, 0).*

H. Найти длину вектора $2\overline{TA}$, определенного точками *T(–1, 3), A(2, 1).*

2.6. Единичный вектор

Векторы, длины которых равны единицу, называют единичными или нормированными.

Задача

Пусть вектор $\overline{YZ}$ *определен точками Y(–3, 5) и Z(5, –3). Определить координаты соответствующего единичного вектора.*

Решение

Координаты $\overline{YZ}$: $(5-(-3); (-3)-5) = (8; -8)$. Тогда, длина $\overline{YZ} = \sqrt{8^2 + (-8)^2} = \sqrt{64+64} = \sqrt{128} = 8\sqrt{2}$. Для того чтобы найти координаты единичного вектора нужно разделить координаты исходного вектора на его длину: Следовательно, координаты единичного вектора

$(8 / 8\sqrt{2}; -8 / 8\sqrt{2}) = (1/\sqrt{2}; -1/\sqrt{2})$.

Упражнение 2.6

С. Пусть вектор $\overline{JH}$ определен точками $J(-1, 15)$ и $H(6, -9)$. Определите координаты соответствующего единичного вектора.

Н. Пусть вектор $\overline{AC}$ определен точками $A(-4, 2)$ и $C(2, 10)$. Определите координаты соответствующего единичного вектора.

2.7. Параллельные вектора

Если векторы параллельны, то их направления совпадают или противоположны. Поэтому, для того чтобы из одного вектора получить еще один, параллельный ему, достаточно умножить его на соответствующее число.

Задача

Определить координаты вектора, который параллелен вектору $\overline{a}$ (5; –12) и имеет длину 5.

Решение

Длина вектора $\overline{a}$: $\sqrt{5^2 + (-12)^2} = \sqrt{169} = 13$. Разделим координаты $\overline{a}$ на его длину и получим соответствующий единичный: ($5/13; -12/13$). Теперь, умножив результат на 5, получим вектор длины 5. Этот вектор $\left(\frac{25}{13}; \frac{-60}{13}\right)$, так же, как и вектор противоположный к нему: $\left(-\frac{25}{13}; \frac{60}{13}\right)$, является решением задачи.

Упражнение 2.7

С. Определить координаты вектора, который параллелен вектору $\bar{b}$ *(–9; 40)* и имеет длину 10.

Н. Определить координаты вектора, который параллелен вектору $\bar{c}$ *(–5; 12)* и имеет длину 4.

2.8. Деление отрезка в заданном отношении

Выводы, которые можно сделать из процесса решения предыдущих примеров позволяют получить решение проблемы деления сегмента в заданном соотношении. Итак, нужно определить координаты точки $C(x_c;\ y_c)$, делящей отрезок АВ в отношении *s:k*. Для решения достаточно заметить, что вектор $\overline{AC}$ параллелен вектору $\overline{AB}$ и имеет длину $\frac{s}{s+k}|\overline{AB}|$.

Задача

Найдите координаты точки С, которая делит отрезок АВ в соотношении 3:2. Точка А имеет координаты (3, 17), точка В имеет координаты (9, 9).

Решение

Чтобы найти координаты точки *С*, определим координаты вектора $\overline{AB}$: *(9–3; 9 – 17) = (6; –8),* затем коэффициент $\frac{s}{s+k} = \frac{3}{3+2}$ *= 0,6* и координаты вектора $\overline{AC}$:
0,6(6; –8) = (3,6; –4,8). Далее, можно воспользоваться тем, что координаты вектора $\overline{AC}$ – это разность координат точек *С* и *А:* $(x_C - 3;\ y_C - 17) = (3{,}6;\ -4{,}8)$. Поэтому, $x_C = 3 + 3{,}6 = 6{,}6;$ $y_C = 17 - 4{,}8 = 12{,}2$.

Наиболее часто встречающаяся задача — деление вектора пополам. В таком случае, $\frac{s}{s+k} = \frac{1}{1+1}$ = *0,5*. Поэтому, середина вектора $\overline{AB}$ будет иметь координаты $(x_A; y_A) + 0{,}5(x_B - x_A; y_B - y_A) = (x_A + 0{,}5(x_B - x_A); y_A + 0{,}5(y_B - y_A)) =$

$= \left(\frac{x_A + x_B}{2} ; \; \frac{y_A + y_B}{2} \right)$. Итак, координаты середины вектора (отрезка) равны полусумме соответствующих координат его концов. В частности, координаты середины $\overline{AB}$ равны $(6; 13)$.

Упражнение 2.8

С. Найдите координаты точки R, которая делит отрезок PQ в соотношении 1:3. Точка P имеет координаты (–3, 7), точка Q имеет координаты (5, 1).

Н. Найдите координаты точки H, которая делит отрезок CF в соотношении 2:1. Точка C имеет координаты (6, –7), точка F имеет координаты (3, 2).

2.9. Задача на сумму векторов

Задача

Жаник и Айбике одновременно пнули мяч. Если бы это сделал только Жаник, мяч полетел бы на север со скоростью 14 м/с. Если бы это сделала только Айбике, мяч полетел бы на северо–запад со скоростью $10\sqrt{2}$ *м/с. На каком расстоянии мяч окажется через 3 секунды? (Чтобы упростить ситуацию, пренебречь сопротивлением воздуха.)*

Решение

Если принять за начало координат место удара по мячу и предположить, что направление на север определяется осью *OY*, то удар по мячу Жаника выражается вектором $\overline{a}\,(0; 14)$.

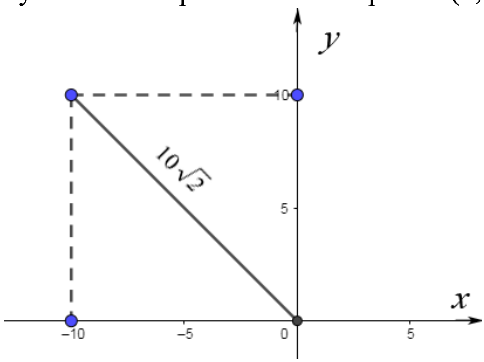


Рисунок 2.6

Соответствующий вектор $\overline{b}$ для Айбике получится, если мы рассмотрим квадрат с диагональю $10\sqrt{2}$. Рисунок 2.6 иллюстрирует удар Айбике. По теореме Пифагора получим координаты вектора $\overline{b}$. Они равны *(–10; 10)*. Результат одновременного удара по мячу определяется суммой векторов: $\overline{a}+\overline{b}$ = *(–10; 24)*. Его длина $\sqrt{10^2+24^2}=\sqrt{100+576}$ = *26* выражает расстояние, которое мяч пролетел за 1 секунду. Соответственно, за 3 секунды, без учета сопротивления воздуха, мяч пролетит 78 метров.

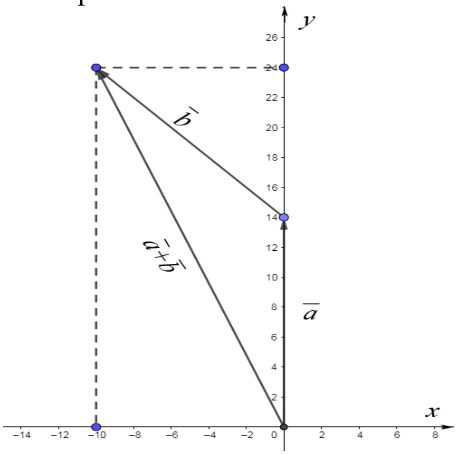


Рисунок 2.7

Упражнение 2.9

С. Канай и Расул одновременно пнули мяч. Если бы это сделал только Канай, то мяч полетел бы на юг со скоростью 15 м/сек. Если бы это сделал только Расул, то мяч полетел бы на запад со скоростью 8 м/сек. На каком расстоянии мяч окажется через 4 секунды? (Чтобы упростить ситуацию, пренебречь сопротивлением воздуха.)

Н. Айбек и Малика одновременно пнули мяч. Если бы это сделал только Айбек, то мяч полетел бы на север со скоростью 5 м/сек. Если бы это сделала только Малика, то мяч полетел бы на восток со скоростью 12 м/сек. На каком расстоянии мяч окажется через 5 секунд? (Чтобы упростить ситуацию, пренебречь сопротивлением воздуха.)

2.10. Площадь треугольника

Использование декартовых координат позволяет использовать другой подход к решению многих геометрических задач. В частности, для нахождения площади треугольника по его сторонам, классический подход предусматривает использование формулы Герона. Оказывается можно действовать и по другому.

Задача

Найти площадь треугольника со сторонами 17 см, 25 см, 28 см.

Решение

Рассмотрим декартову систему координат на плоскости. Расположим самую длинную сторону треугольника на оси *OX* так, чтобы одна из вершин оказалась в точке (0; 0) — в начале координат, а другая — в (28; 0). Координаты третьей вершины обозначим $(x_A; y_A)$.

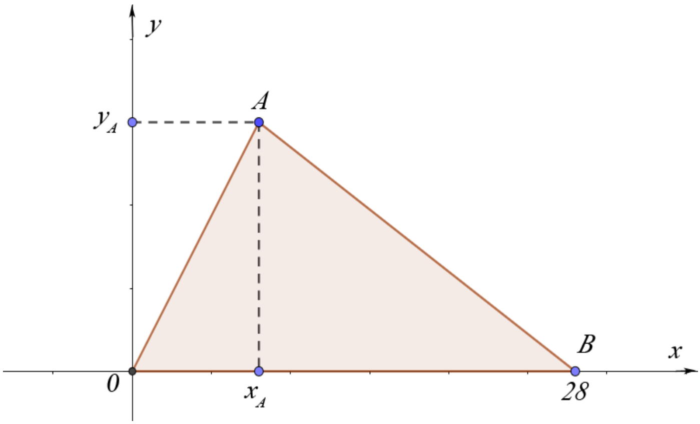


Рисунок 2.8

Далее, используем формулу для нахождения длины отрезка (вектора) и получим систему**:**

$$\begin{cases} (x_A-0)^2+(y_A-0)^2=17^2; \\ (x_A-28)^2+(y_A-0)^2=25^2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A^{\ 2}+y_A^{\ 2}=17^2; \\ (x_A-28)^2+y_A^{\ 2}=25^2. \end{cases}$$

Теперь, вычтем второе уравнение системы из первого:

$x_A^2 - (x_A - 28)^2 = 17^2 - 25^2$. Для упрощения полученного уравнения полезно использовать формулу разности квадратов $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$. Тогда: $x_A^2 - (x_A - 28)^2 = 17^2 - 25^2 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 28(2x - 28) = -8 \cdot 42 \Leftrightarrow (2x - 28) = -8 \cdot 42/28 \Leftrightarrow 2x_A = -12 + 28 \Leftrightarrow$ $x_A = 16/2 = 8$. Подставим найденное значение в первое уравнение системы: $8^2 + y_A^2 = 17^2 \Leftrightarrow \; y_A^2 = 225$.

Таким образом получились два решения — две точки, в которых может располагаться третья вершина треугольника: *(8, 15)* или *(8, –15)*.

Рисунок 2.8 показывает, что треугольник можно рассматривать как объединение двух прямоугольных треугольников с катетами *8* и *28 – 8 = 20*, и общим катетом *15.* Сумма их площадей: $8 \cdot 15/2 = 60$; $20 \cdot 15/2 = 150$ дает искомое число: $60 + 150 = 210$.

Упражнение 2.10

С. Найти площадь треугольника со сторонами *20 мм, 65 мм, 75 мм.*

Н. Найти площадь треугольника со сторонами *101 см, 25 см, 114 см.*

2.11. Скалярное произведение векторов

Скалярное произведение двух векторов — это число, равное произведению длин векторов на косинус угла между ними**.** Его обозначают $(\bar{a}\,|\,\bar{b})$ или $(\bar{a}, \bar{b})$ или $\bar{a} \cdot \bar{b}$. Думаем, что первое обозначение более предпочтительно, потому что другие обозначения часто используются и в других случаях. Итак, $(\bar{a}\,|\,\bar{b}) = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cos\alpha$. Отсюда, так как косинус 90º равен нулю, получаем, что скалярное произведение перпендикулярных векторов равно нулю.

Оказывается использование декартовых координат, как и во многих других случаях, позволяет упростить процесс вычисления: для того, чтобы найти скалярное произведение достаточно сложить попарные произведения соответствующих координат: $(\bar{a}\,|\,\bar{b}) = x_a \cdot x_b + y_a \cdot y_b$.

Задача

В магазине продаются 4 вида товаров. Пусть вектор

$\bar{b}$ *(102; 205; 283; 792) выражает объемы продаж, вектор* $\bar{p}$ *(200; 20; 35;120) — соответствующие цены. Тогда, выручку можно рассматривать как скалярное произведение векторов*: $\bar{p}$ *(200; 20; 35;120) и* $\bar{b}$ *(102; 205; 283; 792)* , то есть

$R = (\bar{p}\,|\,\bar{b}) = 200 \cdot 102 + 20 \cdot 205 + 35 \cdot 283 + 120 \cdot 792 = 129445.$

Упражнение 2.11

С. Заданы точки $A(-2, 1, 3)$, $B(1, -1, 5)$ и вектор $\bar{a}(-5; 2; 4)$. Вычислите скалярное произведение векторов $\overline{2AB}$ и $\bar{a}$.

Н. Заданы точки $A(2, -3)$, $B(1, 5)$ и вектор $\bar{a}(-5; 1)$. Вычислите скалярное произведение векторов $\overline{BA}$ и $\overline{0{,}5a}$.

2.12. Угол между векторами

Одна из популярных задач аналитической геометрии — это задача определения угла между векторами. Как мы уже знаем, значение скалярного произведения можно найти как произведение длин этих векторов на косинус угла между ними, а также как сумму произведений соответствующих координат. Поэтому, можно написать и решить соответствующее уравнение.

Задача

Найти угол между векторами $\bar{a}(3;0)$ *и* $\bar{b}(6;2\sqrt{3})$.

Решение

Так как $(\bar{a}\,|\,\bar{b}) = 3 \cdot 6 + 0 \cdot 2\sqrt{3} = 18;$

$|\bar{a}| = \sqrt{3^2 + 0^2} = \sqrt{9} = 3;\ |\bar{b}| = \sqrt{6^2 + (2\sqrt{2})^2} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$,

имеет место уравнение, $18 = 3 \cdot 4\sqrt{3} \cdot \cos\alpha$.

Поэтому, $\cos\alpha = \dfrac{18}{3 \cdot 4\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, и $\alpha = 30^0$.

Упражнение 2.12

С. Заданы точки $A(-2, 1, 3)$, $B(1, -1, 5)$ и вектор $\bar{a}(-5; 2; 4)$. Найти угол между векторами $\overline{BA}$ и $\bar{a}$.

Н. Заданы точки *A(2, –3), B(1, 5)* и вектор $\overline{a}(-5;\ 1)$. Найти угол между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{2021a}$.

Примечание

Следует заметить, что у Вас уже достаточно знаний, для того чтобы решить задачу об Евклиде, которая была приведена во Введении. Попробуйте ее решить. Для удобства, напоминаем ее формулировку.

Умирая, Евклид сообщил своим детям, что закопал 800 золотых монет – по 100 в каждой вершине квадрата. На первую вершину можно попасть, сделав 20 шагов на запад и 10 шагов на юг от старой яблони, на вторую: сделав 40 шагов на восток и 30 шагов на юг от старой яблони. В 2–х указанных местах, дети действительно обнаружили по 100 монет, после этого нашли еще два клада и на этом остановились, решив, что отец ошибся — так как у квадрата четыре вершины, может быть закопано только 400 монет. Проясните ситуацию и укажите точки, в которых закопаны монеты.

2.13. Разложение вектора

Многие задачи на составление уравнений можно интерпретировать как задачи на разложение вектора — нахождение координат *n*–мерного вектора $\overline{a}$ в базисе из векторов $\overline{b_1}$, $\overline{b_2}$, $\overline{b_3}$, ..., $\overline{b_n}$. По сути, это задача на решение системы *n* линейных уравнений с *n* неизвестными:

$$\overline{a} = x_1 \overline{b_1} + x_2 \overline{b_2} + x_3 \overline{b_3} + \ldots + x_n \overline{b_n}.$$

Задача

Найти координаты вектора (159; 172) в базисе из векторов (0,3; 0,4) и (0,7; 0,6).

Решение

Векторное уравнение $(159;\ 172) = x(0,3;\ 0,4) + y(0,7;\ 0,6)$ равносильно системе: $\begin{cases} 0,3x + 0,7y = 159, \\ 0,4x + 0,6y = 172. \end{cases}$ Решение системы: $x = 250;\ y = 120$ — это искомые координаты.

Эту задачу можно рассматривать как математическую модель следующей задачи: *В магазине продаются два набора конфет. Первый содержит 300 г шоколадных конфет, 700 г карамели и стоит 159 сомов. Второй содержит 400 г шоколадных конфет, 600 г карамели конфет и стоит 172 сома. Сколько стоит 1 килограмм шоколадных конфет и сколько стоит 1 килограмм карамели?*

Замечание

Задача о векторной декомпозиции имеет решение только в том случае, когда определитель, столбцы которого являются координатами базисных векторов $\overline{b_1}$, $\overline{b_2}$, ..., $\overline{b_n}$, не равен нулю.

Упражнение 2.13

С. Заданы точки $A(1,\ 3)$, $B(-1,\ 5)$, $C(3,\ -2)$ и вектор $\overline{a}\,(-5;\ 4)$. Найдите координаты вектора $\overline{a}$ в базисе из векторов $\overline{AB}$, $\overline{AC}$.

Н. Заданы точки $A(2,\ -3)$, $B(1,\ 5)$, $C(-2,\ 7)$ и вектор $\overline{a}\,(5;\ -3)$. Найдите координаты вектора $\overline{a}$ в базисе из векторов $\overline{BA}$, $\overline{BC}$.

2.14. Декартовы составляющие векторов

Единичные вектора обычно используются для обозначения осей в декартовой системе координат. Так, через ***i*** обозначают единичный вектор, указывающий на направление оси OX; ***j*** — оси OY; ***k*** — оси OZ.

Они также часто обозначаются с использованием общепринятых векторных обозначений ($\overline{i}$; $\overline{j}$; $\overline{k}$), а не стандартных обозначений единичных векторов ($\hat{\imath}$; $\hat{\jmath}$; $\hat{k}$). Также, чаще всего применяется обозначение ***i, j,*** и ***k***.

Поэтому, выражения $\overline{a}\,(2; -3; 4)$ и $\overline{a} = 2i - 3j + 4k$ равносильны.

Задача

Выразить вектор $3\overline{a} - 2{,}5\overline{b}$, *где* $\overline{a} = -2{,}2i + 3j$; $\overline{b} = 8{,}5i + 2{,}3j$, *через единичные вектора* ***i*** *и* ***j***. *Найти скалярное произведение векторов* $\overline{a}$ *и* $\overline{b}$.

Решение

Так как имеется возможность использовать разные способы записи векторов, этим стоит воспользоваться:

$3\overline{a} - 2{,}5\overline{b} = 3(-2{,}2;\ 3) - 2{,}5(8{,}5;\ 2{,}3) = (-6{,}6;\ 9) - (21{,}25;\ 5{,}75) = (-27{,}85;\ 3{,}25) = -27{,}85i + 3{,}25j.$

Скалярное произведение: $(\overline{a}\,|\,\overline{b}) = ((-2{,}2;\ 3)|(8{,}5;\ 2{,}3)) = -2{,}2\cdot 8{,}5 + 3\cdot 2{,}3 = -18{,}7 + 6{,}9 = -11{,}8.$

Упражнение 2.14

C. Заданы векторы $\overline{a} = 12i - 3j - 5k;\ \overline{b} = -5i + 2j + 7k$. Выразить вектор $1{,}3\overline{a} + 2\overline{b}$ через единичные вектора ***i*** и ***j***. Найти скалярное произведение векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$.

H. Заданы векторы $\overline{a} = -9i + 4j;\ \overline{b} = 3i + 1{,}2j$. Выразить вектор $-0{,}4\overline{a} + 6\overline{b}$ через единичные вектора ***i*** и ***j***. Найти скалярное произведение векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$.

2.15. Задача

Еще раз подчеркнем важность умения выполнять различные операции с конкретными векторами. Рассмотрим пример.

Задача

Заданы точки A(12, 4), B(2, – 6), C(16, –4). Точка P делит отрезок AB в отношении 1:4; точка Q является серединой отрезка BC; точка R делит отрезок AC в отношении 1:3. Найдите:

a) Координаты точек P, Q и R.

b) Скалярное произведение векторов $\overline{PQ}$ *и* $\overline{PR}$*;*

c) Угол между векторами $\overline{PQ}$ *и* $\overline{PR}$*;*

d) Площадь треугольника PQR.

e) Координаты точки T , являющейся вершиной параллелограмма PQRT;

f) Координаты вектора QT в базисе из векторов AB и BC.

Решение

Используем иллюстрацию.

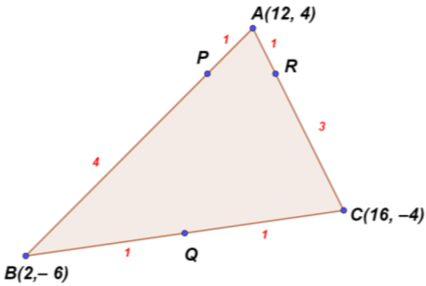


Рисунок 2.9

а) Нахождение координат точки P начнем с вычисления координат вектора $\overline{AB}$: $\overline{AB} = (2–12; –6–4) = (–10; –10)$. Деление в отношении 1:4 означает деление на 5 частей. Поэтому, $\overline{AP} = \dfrac{1}{1+4}\overline{AB} = (1/5)(–10; –10) = (–2; –2)$.

Обозначив координаты точки P через (x_P, y_P), получим: $\overline{AP} = (x_P - 12; y_P - 4) = (–2; –2)$, и отсюда, $x_P - 12 = –2 =>$ $=> x_P = 10;\ y_P - 4 = –2 => y_P = 2 => P(10, 2)$.

Таким же образом можно найти координаты точек Q и R.

$\overline{BC} = (16–2; –4+6) = (14; 2);\ \overline{BQ} = \dfrac{1}{2}\overline{BC} = \dfrac{1}{2}(14; 2) = (7;1)$.

Обозначим координаты точки Q через (x_Q, y_Q). Тогда $\overline{BQ} = (x_Q - 2; y_Q + 6) = (7; 1)$, и отсюда, $x_Q - 2 = 7 => x_Q = 9;$ $y_Q + 6 = 1 => y_Q = -5 => Q(9, –5)$.

$\overline{AC} = (16 – 12; –4–4) = (4; –8);\ \overline{AR} = \dfrac{1}{4}\overline{AC} = \dfrac{1}{4}(4; –8) = (1; –2)$.

Обозначим координаты точки R через (x_R, y_R).

Тогда $\overline{AR} = (x_R - 12; y_R - 4) = (1; –2)$, и отсюда, $x_R - 12 = 1 =>$ $=> x_R = 13;\ y_R - 4 = -2 => y_R = 2 => R(13, 2)$.

b) Так как из результатов предыдущего пункта, получатся координаты векторов $\overline{PQ} = (-1;-7)$; $\overline{PR} = (3;0)$, их скалярное произведение: $\left(\overline{PQ}\middle|\overline{PR}\right) = (-1)\cdot 3 + (-7)\cdot 0 = -3$.

c) $\left|\overline{PQ}\right| = \sqrt{(-1)^2 + (-7)^2} = \sqrt{50}$, $\left|\overline{PR}\right| = \sqrt{3^2 + 0^2} = 3$. Использовав длины векторов и два разных представления величины скалярного произведения, получим ответ:

$$\cos P = \frac{\left(\overline{PQ}\middle|\overline{PR}\right)}{\left|\overline{PQ}\right|\cdot\left|\overline{PR}\right|} = \frac{-3}{\sqrt{50}\cdot 3} = -\frac{1}{\sqrt{50}} \Rightarrow P = \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{50}}\right).$$

d) Площадь треугольника можно вычислять различными способами. Например, по формуле $S_{\Delta PQR} = \frac{1}{2}\left|\overline{PQ}\right|\cdot\left|\overline{PR}\right|\cdot\sin P$.

Для вычисления нам нужно значение синуса. Его мы можем вычислить, используя основное тригонометрическое тождество:

$$\sin P = \sqrt{1 - \cos^2 P} = \sqrt{1 - \frac{1}{50}} = \sqrt{\frac{49}{50}} = \frac{7}{\sqrt{50}}.$$

Тогда, $S_{\Delta PQR} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{50}\cdot 3\cdot\frac{7}{\sqrt{50}} = 10,5$.

Заметим, что в далее будет приведен способ вычисления площади треугольника по координатам его вершин, позволяющий избежать объемных вычислений.

e) Воспользуемся рисунком параллелограмма. $\overline{PQ}(-1;-7)$; $\overline{TR}(13-x;2-y)$.

Так как противоположные стороны параллелограмма равны и параллельны, имеет место равенство векторов: $\overline{PQ} = \overline{TR}$ или, то же самое на языке координат,

$(-1;-7) = (13-x;2-y) \Rightarrow -1 = 13-x \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 14;\quad -7 = 2-y \Rightarrow y = 9;\quad \Rightarrow T(14,9)$

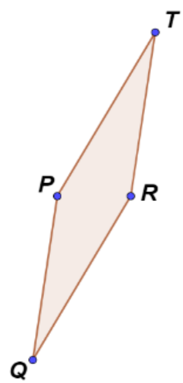


Рисунок 2.10

f) Для того чтобы вычислить координаты вектора QT в базисе из векторов AB и BC запишем векторное уравнение: $\overline{QT} = m\overline{AB} + n\overline{BC}$; Так как $\overline{QT}$ = (5; 14); $\overline{AB}$ = (–10; –10); $\overline{BC}$ = (14; 2), это уравнение равносильно системе

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 14 \end{pmatrix} = m\begin{pmatrix} -10 \\ -10 \end{pmatrix} + n\begin{pmatrix} 14 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 5 \\ 14 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} -10m + 14n \\ -10m + 2n \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -10m + 14n = 5, \\ -10m + 2n = 14, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = -1{,}55 \\ n = -0{,}75 \end{cases}.$$

Таким образом, $\overline{QT} = -1{,}55\overline{AB} - 0{,}75\overline{BC}$.

Упражнение 2.15

C. *Заданы вершины треугольника A(–1, 0), B(2, 3), C(7, –2). Точка P делит отрезок BC в отношении 3:2. Найдите:*

a) Длину AC;

b) Скалярное произведение векторов $\overline{CA}$ *и* $\overline{CB}$ *;*

c) Угол между векторами $\overline{CA}$ *и* $\overline{CB}$ *;*

d) Координаты точки P;

e) Площадь треугольника ABP;

f) Длину биссектрисы BL треугольника ABP;

g) Координаты точки D — вершины параллелограмма ABCD.

h) Координаты вектора BL в базисе из векторов $\overline{CA}$ *и* $\overline{CB}$.

H. *Заданы вершины треугольника A(–3, –2), B(–1, 4), C(5, 2). Точка P делит отрезок BC в отношении 7:3. Найдите:*

a) Длину AB;

b) Скалярное произведение векторов $\overline{AB}$ *и* $\overline{AC}$ *;*

c) Угол между векторами $\overline{AB}$ *и* $\overline{AC}$ *;*

d) Площадь треугольника ABC;

e) Длину медианы AK треугольника ABC;

f) Координаты точки P;

g) Координаты точки D — вершины параллелограмма ABCD.

h) Координаты вектора $\overline{CP}$ *в базисе из векторов* $\overline{AB}$ *и* $\overline{AC}$.

2.16. Решение задачи об Евклиде

Надеемся, что Вам удалось найти координаты точек, в которых были закопаны монеты. Далее, еще раз приведен текст задачи и один из вариантов ее решения.

Умирая, Евклид сообщил своим детям, что закопал 800 золотых монет – по 100 в каждой вершине квадрата. На первую вершину можно попасть, сделав 20 шагов на запад и 10 шагов на юг от старой яблони, на вторую: сделав 40 шагов на восток и 30 шагов на юг от старой яблони. В 2–х указанных местах, дети действительно обнаружили по 100 монет, после этого нашли еще два клада и на этом остановились, решив, что отец ошибся – так как у квадрата четыре вершины, может быть закопано только 400 монет. Проясните ситуацию и укажите точки, в которых закопаны монеты.

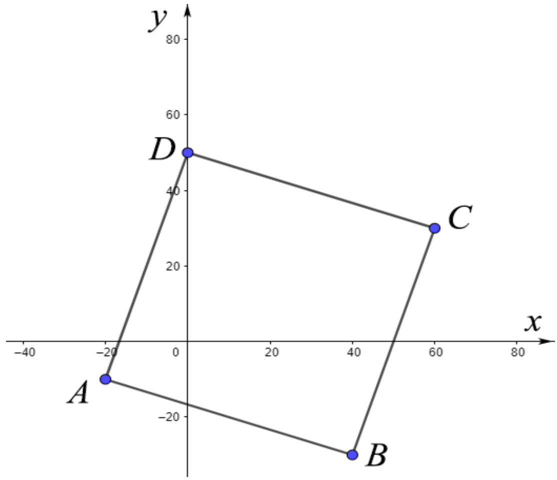


Рисунок 2.11

Для того чтобы упростить рассмотрения, стоит воспользоваться декартовой системой координат, совместив начало координат со старой яблоней. Тогда, два первых клада расположены в точках *A(–20, –10)* и *B(40, –30)*, остальные в точках *C* и *D*. Определим их координаты.

Третий клад найдем из следующих соображений: он расположен в вершине *C* вектора *BC*, который начинается в точке *B*; совпадает по длине и перпендикулярен вектору *BA*.

Переведем эти соображения на язык математики. Начнем с координат вектора *BA: (–20–40; –10–(–30))= (–60; 20).* Соответственно, длина вектора *BA:* $|BA| = \sqrt{(-60)^2 + 20^2} = \sqrt{4000}$.

Если обозначить координаты точки C через (x_c, y_c), тогда вектор *BC* имеет координаты $(x_c - 40;\ y_c - (-30))$.

Перпендикулярность векторов означает равенство нулю скалярного произведения: $(x_c - 40)(-60) + (y_c + 30)20 = 0$.

В итоге, имеет место система алгебраических уравнений $\begin{cases} (x_c - 40)^2 + (y_c + 30)^2 = 4000; \\ (x_c - 40)(-60) + (y_c + 30)20 = 0. \end{cases}$ Видимо самый простой вариант решения этой системы заключается в следующем: нужно выразить $y_C + 30$ из 2-го уравнения системы: $y_C + 30 = 3(x_C - 40)$, и подставить в первое. Тогда получится уравнение $(x_C - 40)^2 + [3(x_C - 40)]^2 = 4000$. Отсюда, $x_C - 40 = 20$ и $x_C - 40 = -20$. В результате получаем два решения системы: (*20; –90*) и (*60; 30*). Какое из них правильное? Поиски ответа на этот вопрос приводят к следующему ответу: оба ответа правильны, так как квадрат с вершинами в *A* и *B* может располагаться не только вправо–вверх от них, но и влево–вниз.

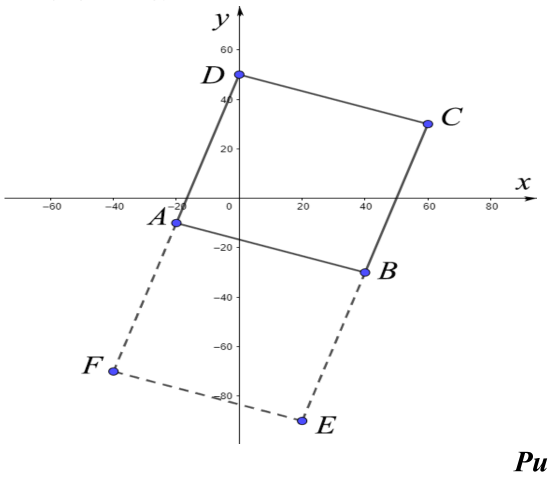


Рисунок 2.12

Для того чтобы найти координаты точек D и F можно повторить процесс, взяв в качестве исходной точки точку A.

Но, все можно сделать гораздо проще: вектор CD имеет координаты $\left(x_D - 60; y_D - 30\right)$ и равен вектору BA. Поэтому, $\left(x_D - 60; y_D - 30\right) = (-60; 20)$. Отсюда, $x_D = 0; y_D = 50$. Точно так же можно определить координаты точки F: $x_F = -40; y_F = -70$.

Итак, мы нашли 6 кладов и их содержимое — 600 монет. Где же еще 2 клада?

Поразмыслив еще немного, можно сообразить, что точки A и B не обязаны быть соседними вершинами квадрата — они могут быть и противоположными.

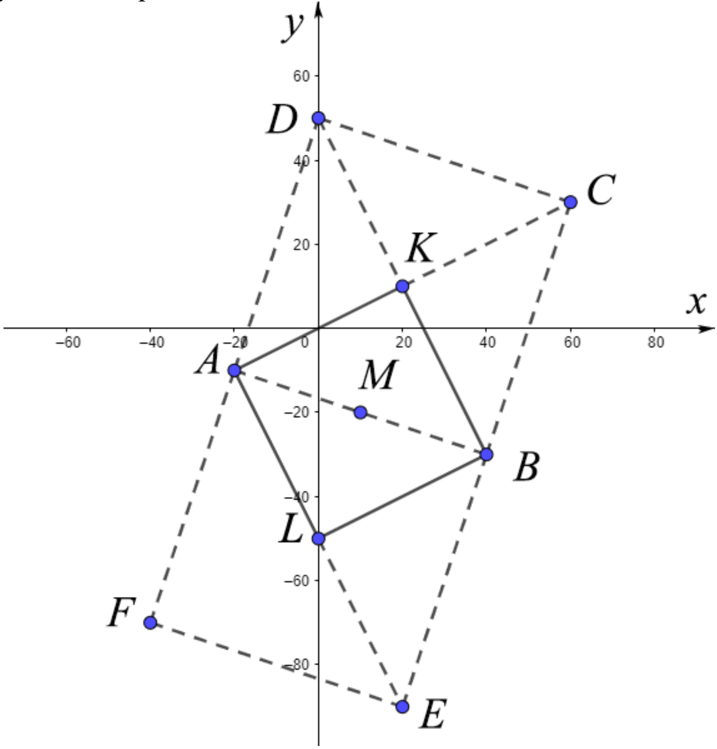


Рисунок 2.13

Для того чтобы найти координаты двух оставшихся точек, можно опять же повторить процесс решения системы:

определить координаты точки *M*, которая является серединой вектора *AB*, написать условие перпендикулярности векторов *MK* и *AB*, воспользоваться тем, что длина *MK* равна половине длины *AB*.

Но, как и в прошлый раз, существует более простое решение. Так как точка *K* является серединой вектора *AC*, ее координаты $\left(\frac{-20+60}{2};\frac{-10+30}{2}\right)$ = (*20; 10*), а координаты точки *L*, из подобных соображений, (*0, –50*).

Итоговые задания

1. Пусть задан пятиугольник *ABCDE*. Найти:

a) Вектор $\overline{AB}+\overline{BC}$;

b) Вектор $\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{DE}+\overline{EA}$;

c) Вектор $\overline{AB}-\overline{CB}+\overline{CE}$;

d) Вектор $\overline{AD}-\overline{CD}-\overline{BC}$.

2. Пусть *ABC* является прямоугольным треугольником с катетами *AC* и *BC*, длины которых 3 и 4, соответственно. Найти:

a) Длину вектора $2\,\overline{AC}+3\overline{CB}$;

b) Длину вектора $4\,\overline{AC}-\overline{BC}$.

3. Определите *x* и *y*, зная что:

a) вектора (*x*; 7) и (2; 6) параллельны;

b) вектора (5; *x*; 3) и (2; 6; y) параллельны.

4. Заданы точки *A (2, –1), B (4, 1), C (2, 5)*. Найти:

a) Координаты и длины векторов $\overline{AB}$, $\overline{AC}$;

b) Координаты точки *D*, зная что вектор *BD* равен вектору *AB*;

c) Координаты точки *E*, зная что вектор *BE* параллелен и два раза длиннее вектора *AB;*

d) Координаты точки *E* делящей отрезок *AB* в отношении 1:2;

e) Скалярное произведение векторов $0{,}5\,\overline{AB}$ и $4\,\overline{AC}$.

5. Заданы точки *A (–2, 3), B (1, –1), D(4; 1).* Найти:

a) Координаты точки *C*, зная что вектор $2\,\overline{AB}-3\,\overline{AC}$ имеет координаты *(0; –11)*;

b) Координаты точки E делящей отрезок AB в отношении 3: 2;

c) Координаты вектора, параллельного $\overline{AB}$, который в три раза длиннее;

d) Угол между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{AD}$.

6. Найти площадь треугольника с длинами сторон *101 см, 25 см, 114 см.*

7. Заданы точки: A (2; –3), B (4; 0), C (–5; 1). Найти:

a) Координаты вектора $\overline{a}$, перпендикулярного к вектору AB, зная что длина вектора $\overline{a}$ равна 10;

b) Координаты точки K, делящей отрезок AB в отношении 5: 2;

c) Угол между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$;

d) Длину отрезка BC;

e) Площадь треугольника ABC;

f) Координаты вектора *(10; –12)* в базисе из векторов $\overline{AB}$ и $\overline{BC}$.

8. Заданы вектора $\overline{a} = -6i + j$; $\overline{b} = i - 7j$. Выразите вектор $-4\overline{a} + 1{,}6\overline{b}$ через единичные вектора $\boldsymbol{i}$ и $\boldsymbol{j}$. Найдите скалярное произведение векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$.

9. В завещании Пифагора было указано, что он закопал 1400 золотых монет, по 100 в каждой вершине прямоугольника. На первую вершину можно попасть, сделав 20 шагов на запад от старого колодца, на вторую — сделав 28 шагов на восток и 36 шагов на север. При этом ширина прямоугольника равна 3/4 длины. Наследники решили, что имела место опечатка — в четырех вершинах прямоугольника может быть только 400 монет и предлагают купить права на клады Пифагора за 1000 золотых монет, говоря, что 400 монет самого Пифагора стоят таких денег. Согласны ли Вы на покупку? Проясните ситуацию и укажите точек, в которых закопаны монеты.

В процессе изучения нового предмета очень важно не просто «проходить материал», а активно его осваивать. Для того чтобы проконтролировать, как происходит этот процесс, студенты АУЦА регулярно пишут проверочные, самостоятельные и контрольные, работы, называемые квизами. Проверьте насколько Вы овладели материалом первого и второго параграфов, выполнив следующий квиз.

КВИЗ 1

1. Решите систему $\begin{cases} 37x + 22y = 183{,}3; \\ 29y - 8x = -2{,}5. \end{cases}$

2–3. Алина, Шахноза, Мунаввар и Дания сделали покупки в магазине. Алина купила 12 килограммов риса, Шахноза — 19 кг моркови, Мунаввар — 18 кг риса и 11 кг моркови. В итоге, Мунаввар заплатил 2029 сомов, а Шахноза заплатила на 589 сомов меньше, чем Алина. Сколько заплатила Дания, которая купила 7 кг риса и 12 кг моркови?

4. Вычислите значения определителей:

a) $\begin{vmatrix} -25 & 501 \\ -67 & 241 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 16 & -4{,}01 \\ 17 & 44{,}1 \end{vmatrix}$

5. Чему равно значение $2x + y$, если $\begin{cases} 7 \cdot \log_2 x - 3\sqrt[3]{y} = 17, \\ 11 \cdot \log_2 x + 5\sqrt[3]{y} = 17 \end{cases}$?

6. Даны точки A(2, 7) и B(–5, 2). Определить координаты и длину вектора AB.

7. Даны точка C(–4, –1) и вектор DC(1; –5). Определить координаты точки E, которая делит вектор CD в отношении 4:1.

8. Даны точки A(2, 7), B(–5, 2) и C(–4, –1). Определить координаты вектора $-i + 2j$ в базисе из векторов AB и AC.

9. Даны точки A(2, 7), B(–5, 2) и C(–4, –1). Найти скалярное произведение векторов AB и AC, а также угол между ними.

10. Найти площадь треугольника, длины сторон которого равны 61 м, 91 м и 100 м.

§3. УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ НА ПЛОСКОСТИ

Отметьте две точки на листе бумаги (на доске) и соедините их. Мы много раз предлагали такое задание своим студентам. Почти все, за редким исключением, рисуют отрезок прямой. Итак, прямая — это естественно. Использование уравнения прямой позволяет разобраться во многих проблемах экономики, бизнеса, … . Дело в том, что, практически, любую кривую с большой степенью точности можно представить в виде ломанной, состоящей из прямолинейных отрезков.

3.1. Задача

Автобус АЛЬФА выехал из Бишкека в Нарын и двигался со скоростью 60 км/час. На каком расстоянии от Бишкека был автобус через: a) 2 часа; b) 2,5 часа; c) 3 часа 30 минут; d) 4 часа 12 минут? Нарисуйте декартову систему координат на плоскости и отметьте на ней соответствующие точки. Убедитесь, что через эти точки можно провести прямую.

Решение

Расстояние будет определяться формулой $s = 60t$, где t — время измеренное в часах. Подставляя в указанную формулу значения времени, будем получать ответы в (км):

a) $s = 60{\cdot}2 = 120$; b) $s = 60{\cdot}2{,}5 = 150$; c) Так как в часе 60 минут, 3 часа 30 минут это 3,5 часа. Поэтому, $s = 60{\cdot}3{,}5 = 210$; d) 4 часа 12 минут = 4,2 часа, потому что 12 минут это $12/60 = 0{,}2$ часа. Поэтому, $s = 60{\cdot}4{,}2 = 252.$

Таким образом, на координатной плоскости нужно отметить точки: (2; 120), (2,5; 150), (3,5; 210), (4,2; 252), где первые координаты указывают время и указываются на горизонтальной оси $0t$, а вторые координаты показывают расстояние от Бишкека в соответствующий момент времени и указываются на вертикальной оси $0s$.

Приложив линейку, убедимся в том, что все эти точки лежат на одной прямой.

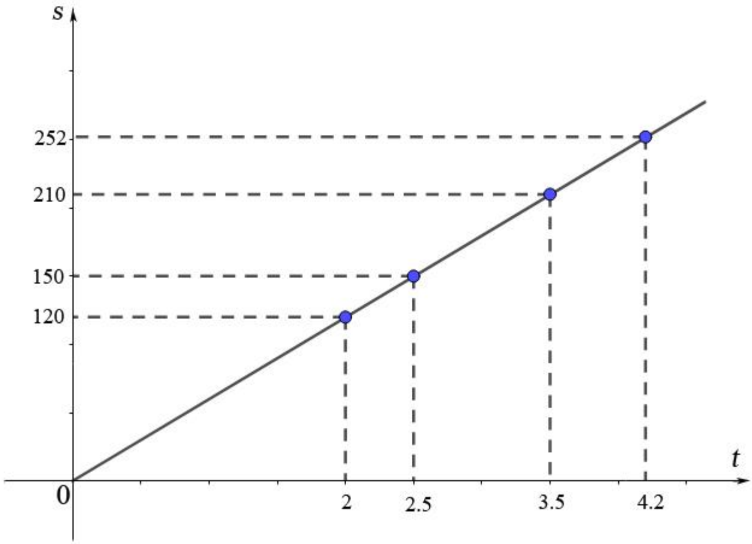


Рисунок 3.1

Упражнение 3.1

C. Юнус продает фасоль по цене 8 лир. Сколько денег будет у него после продажи: a) 2 кг; b) 5 кг фасоли? Сколько кг фасоли продал Юнус, если он заработал c) 24 лиры; d) 30 лир? Нарисуйте декартову систему координат на плоскости и отметьте на ней соответствующие точки, откладывая вес проданной фасоли по горизонтали, а количество лир по вертикали. Убедитесь, что через эти точки можно провести прямую. Напишите функцию, выражающую количество лир у Юнуса через вес проданной фасоли.

H. Вода в бассейн вливается со скоростью 5 литров в минуту. Сколько литров воды будет в бассейне через:
a) 3 минуты; b) 7 минут? Через сколько минут в бассейне будет: c) 20 литров; d) 14 литров воды? Нарисуйте декартову систему координат на плоскости и отметьте на ней соответствующие точки, откладывая количество минут по горизонтали, а количество литров воды по вертикали. Убедитесь, что через эти точки можно провести прямую. Напишите функцию, выражающую объем воды в бассейне через время в минутах.

3.2. Задача

За 45 минут до автобуса АЛЬФА (смотри задачу 3.1) из Бишкека в Нарын выехал автобус БЕТА. Также, из Бишкека в Нарын через 1,5 часа после автобуса АЛЬФА выехал автобус ГАММА. Оба этих автобуса, также как и автобус АЛЬФА двигались со скоростью 60 км/час. На каком расстоянии от Бишкека будут БЕТА и ГАММА через: a) 2 часа; b) 2,5 часа; c) 3 часа 30 минут; d) 4 часа 12 минут после отправления в путь автобуса АЛЬФА? Нарисуйте декартову систему координат на плоскости и отметьте на ней соответствующие точки. Убедитесь, что через точки относящиеся к БЕТА можно провести прямую. То же относительно ГАММА. Нарисуйте три прямые относящиеся к этим трем автобусам в одной координатной плоскости. Убедитесь, в том, что они параллельны.

Решение

За 45 минут, то есть за 0,75 часа, автобус БЕТА проехал $60 \cdot 0{,}75 = 45$ километров. Тогда, так как расстояние, пройденное АЛЬФА, определяется формулой $s = 60t$, расстояние пройденное БЕТА определяется формулой $s_B = 60t + 45$. Из таких же соображений, так как $60 \cdot 1{,}5 = 90$, расстояние пройденное автобусом ГАММА определяется формулой $s_G = 60t - 90$.
Подставляя в указанные формулы значения времени, будем получать ответы в (км):

a) $s_B = 60 \cdot 2 + 45 = 165$; $s_G = 60 \cdot 2 - 90 = 30$;
b) $s_B = 60 \cdot 2{,}5 + 45 = 195$; $s_G = 60 \cdot 2{,}5 - 90 = 60$;
c) $s_B = 60 \cdot 3{,}5 + 45 = 255$; $s_G = 60 \cdot 3{,}5 - 90 = 120$;
d) $s_B = 60 \cdot 4{,}2 + 45 = 297$; $s_G = 60 \cdot 4{,}2 - 90 = 162$.

Таким образом, прямая, описывающая движение автобуса БЕТА проходит через точки: (2; 165), (2,5; 195), (3,5; 255), (4,2; 297), а прямая, описывающая движение автобуса ГАММА проходит через точки: (2; 30), (2,5; 60), (3,5; 120), (4,2; 162).
Функции: $s = 60t$, $s_B = 60t + 45$, $s_G = 60t - 90$ являются частными случаями линейной функции, которую обычно записывают в виде $y = mx + b$.

Число b является координатой точки пересечения прямой с вертикальной осью.

Коэффициент m называют *<u>наклоном</u>* (угловым коэффициентом) прямой.

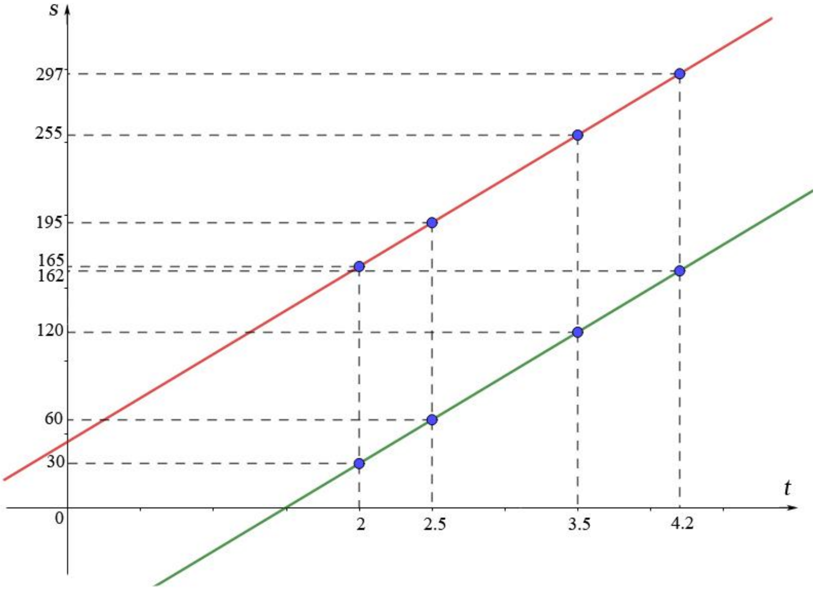


Рисунок 3.2

Представьте себе, что автобусы АЛЬФА, БЕТА и ГАММА, прибыв в Нарын не остановятся и продолжат движение с теми же скоростями. Когда АЛЬФУ догонит БЕТА и когда БЕТУ догонит ГАММА? Ответ, конечно, очевиден: никогда. На языке графиков — все три прямые имеют одинаковый наклон, равный 60 — все три прямые параллельны друг другу. Так как такие прямые не пересекаются, графики, выражающие движение автобусов, не могут иметь общих точек.

Упражнение 3.2

С. Ответьте на вопросы к упражнению 3.1С, предполагая, что в начальный момент времени: 1) у Юнуса было 10 лир;
2) Юнус был должен 5 лир.

Н. Ответьте на вопросы к упражнению 3.1Н, предполагая, что в начальный момент времени: 1) в бассейне было 2 литра воды; 2) в бассейне было 8 литров воды.

3.3. Задача

В час дня мотоцикл находился на расстоянии 25 км от Бишкека, в 4 часа дня — на расстоянии 226 км. Определите наклон прямой, описывающей движение мотоцикла. Нарисуйте ее график.

В два часа того же дня велосипедист находился на расстоянии 50 км от Бишкека, в 6 часов дня — на расстоянии 138 км. Определите наклон прямой, описывающей движение велосипедиста. Нарисуйте ее график в той же координатной плоскости, что и график движения мотоцикла.

Решение

Откладывая значения времени по горизонтальной, а расстояния — по вертикальной оси, получим две точки, относящиеся к мотоциклу. Соединив их, получим соответствующую прямую. Также поступим и с велосипедистом.

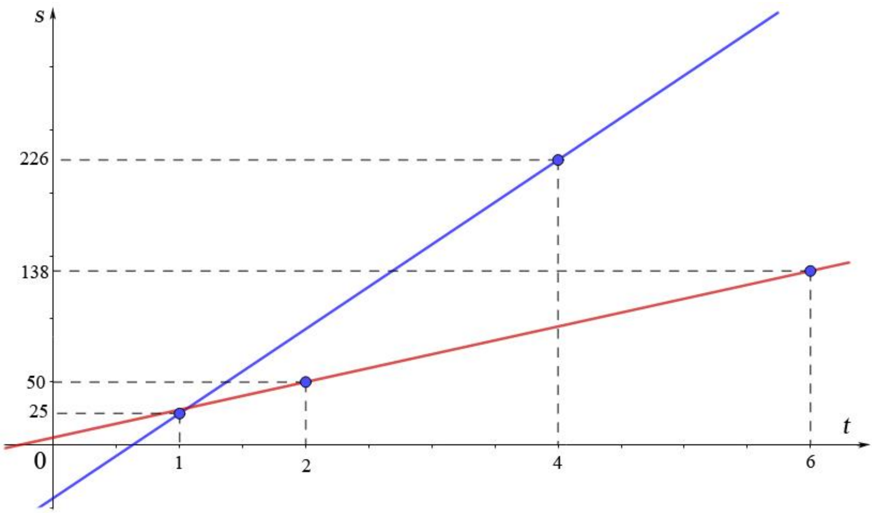


Рисунок 3.3

Наклон прямой — это скорость изменения зависимой переменной от аргумента, в данном случае расстояния от времени. То есть в данном случае наклон первой прямой это скорость мотоцикла: $\frac{226 - 25}{4 - 1} = \frac{201}{3} = 67$ **;**

наклон второй — велосипедиста: $\dfrac{138 - 50}{6 - 2} = \dfrac{88}{4} = 22$.

Видно, что более высокая скорость выражается большим наклоном прямой.

Замечание

Важно отметить, что, говоря о скорости мы имеем в виду среднюю скорость.

Упражнение 3.3

С. При цене 80 сомов на рынке предлагают 25 тонн риса, при цене 100 сомов — 30 тонн. Нарисуйте прямую проходящую через эти точки и определите наклон прямой, описывающей предложение риса на этом рынке, откладывая количество риса по горизонтали, цену по вертикали.

При цене 87 сомов на рынке готовы купить 32 тонн риса, при цене 82 сомов — 36 тонн. Определите наклон прямой, описывающей спрос на рис на этом рынке. Нарисуйте ее график в той же координатной плоскости, что и график предложения риса.

Н. При цене 150 сомов на рынке предлагают 2 тонны лимонов, при цене 125 сомов — 1,6 тонн. Нарисуйте прямую проходящую через эти точки и определите наклон прямой, описывающей предложение лимонов на этом рынке, откладывая количество лимонов по горизонтали, цену по вертикали.

При цене 165 сомов на рынке готовы купить 1,42 тонны лимонов, при цене 143 сомов — 1,97 тонн. Определите наклон прямой, описывающей спрос на лимоны на этом рынке. Нарисуйте ее график в той же координатной плоскости, что и график предложения лимонов.

3.4. Задача

Из Нарына в Бишкек выехал автомобиль и двигался со скоростью 80 км/час. Расстояние между Нарыном и Бишкеком по дороге 315 километров. На каком расстоянии от Бишкека он был через: a) 1 час; b) 2,5 часа; c) 2 часа 54 минуты; d) 3 часа 15 минут? Нарисуйте декартову систему координат на плоскости и отметьте на ней соответствующие точки. Убедитесь, что через эти точки можно провести прямую.

Решение

В исходный момент времени, то есть при $t = 0$ расстояние равно 315, далее через каждый час оно будет сокращаться на 80 км. Поэтому, расстояние будет определяться формулой

$s = 315 - 80t$, где t — время измеренное в часах. Подставляя в указанную формулу значения времени, получим ответы в (км):

a) $s = 315 - 80 \cdot 1 = 235$; b) $s = 315 - 80 \cdot 2{,}5 = 115$;

c) $s = 315 - 80 \cdot 2{,}9 = 83$; d) $s = 315 - 80 \cdot 3{,}25 = 55$.

В этом случае, на координатной плоскости нужно отметить точки: (1; 235), (2,5; 115), (2,9; 83), (3,25; 55).

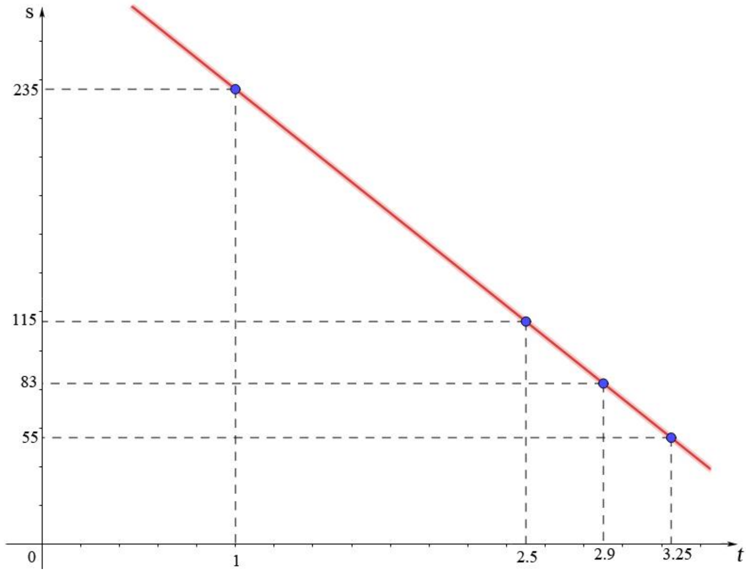


Рисунок 3.4

Приложив линейку, убедимся в том, что все эти точки лежат на одной прямой. Коэффициент m в данном случае равен -80. Знак минус означает, что между переменными, временем и расстоянием, в данном случае имеет место обратная зависимость — с увеличением значения времени расстояние уменьшается.

Упражнение 3.4

С. Дайана, у которой имеется 300 сомов, покупает виноград по цене 80 сомов. Сколько денег останется у нее после покупки: a) 2 кг; b) 0,5 кг винограда? Сколько кг винограда купила

Дайана, если у нее осталось: c) 100 сомов; d) 200 сомов? Нарисуйте декартову систему координат на плоскости и отметьте на ней точки, откладывая вес винограда по горизонтали, а количество сомов по вертикали. Убедитесь, что через эти точки можно провести прямую. Напишите функцию, выражающую количество сомов у Дайаны через вес купленного винограда.

H. В бочке 80 литров воды. Она выливается со скоростью 4 литра в минуту. Сколько литров воды будет в бочке через:
a) 5 минут; b) 15 минут? Через сколько минут в бочке останется: c) 52 литра; d) 40 литров воды? Нарисуйте декартову систему координат на плоскости и отметьте на ней соответствующие точки, откладывая количество минут по горизонтали, а количество литров воды по вертикали. Убедитесь, что через эти точки можно провести прямую. Напишите функцию, выражающую объем воды в бочке через время в минутах.

3.5. Задача

В 2 часа 24 минуты мотоцикл находился на расстоянии 150 км от Бишкека и двигался в сторону Нарына со скоростью 56 км/час. Напишите соответствующую функцию и определите, на каком расстоянии от Бишкека находился мотоцикл в 4 часа дня. Проверьте полученный ответ.

Решение

Как уже говорилось, движение с постоянной скоростью можно описать функцией $y = mx + b$, где x будет выражать время, а y — расстояние. Наклон прямой задается скоростью, то есть имеет место функция $y = 56x + b$. Для того чтобы найти значение коэффициента b используем условие «В 2 часа 24 минуты мотоцикл находился на расстоянии 150 км от Бишкека». Так как 2 часа 24 минуты это 2,4 часа, получаем уравнение $150=56\cdot 2,4+b$. Отсюда, $b = 15,6$. Итак, движение мотоцикла описывается функцией $y = 56x + 15,6$ и в 4 часа дня он был на расстоянии: $y = 56\cdot 4 + 15,6 = 239,6$ километров от Бишкека.

Проверить ответ легко. Так как за: $4 - 2,4 = 1,6$ часов мотоциклист преодолеет $56\cdot 1,6 = 89,6$ километров, он окажется на расстоянии: $89,6 + 150 = 239,6$ километров от Бишкека.

Итак, мы показали, что уравнение прямой можно определить однозначно, если известны угловой коэффициент и координаты точки, лежащей на этой прямой.

Упражнение 3.5

C. Камрон продает абрикосы по цене 45 сомони. После продажи 4 кг у него в кармане 250 сомони. Напишите функцию, выражающую количество сомони у Камрона через вес проданных абрикосов. Сколько сомони будет у него после продажи 6,4 кг абрикосов?

H. Вода из бочки выливается со скоростью 8 литров в минуту. Через 5 минут от начала в бочке оставалось 54 литра воды? Напишите функцию, выражающую объем воды в бочке через время в минутах. Сколько воды останется в бочке через 8,5 минут?

3.6. Задача

Напишите уравнение прямой, которая параллельна прямой k и проходит через точку M.

a) Уравнение k: $y = 2x - 1;$ $M(2;\ 7);$

b) Уравнение k: $y = -0{,}5x + 6;$ $M(2;\ 3).$

Нарисуйте исходные и полученные прямые.

Решение

Как уже говорилось, параллельные прямые имеют одинаковый наклон. Поэтому, достаточно определить значение свободного коэффициента.

a) Искомое уравнение: $y = 2x + b$. Подставив координаты точки M, получим $7 = 2 \cdot 2 + b$. Таким образом, $y = 2x + 3$.

Для того чтобы нарисовать прямую линии достаточно иметь две точки. В качестве одной из них всегда можно использовать точку пересечения с вертикальной осью — значение коэффициента b. Координаты второй точки в полученном уравнении известны из условия, а в исходной прямой можно выбрать какое–нибудь значение аргумента и по уравнению вычислить соответствующее значение функции. Например, если $x = 2$, то $y = 3$.

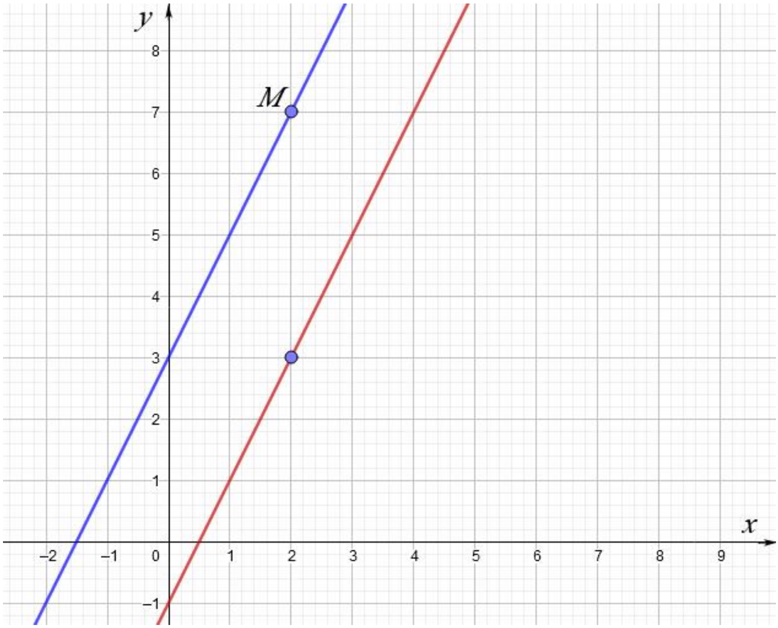


Рисунок 3.5

b) Искомое уравнение: $y=-0{,}5x+b$. Подставив координаты точки М, получим $3 = -0{,}5\cdot 2 + b$. Таким образом, $y = -0{,}5x + 4$. Для того чтобы найти координаты второй точки исходной прямой можно взять $x = 12$. Тогда $y = 0$.

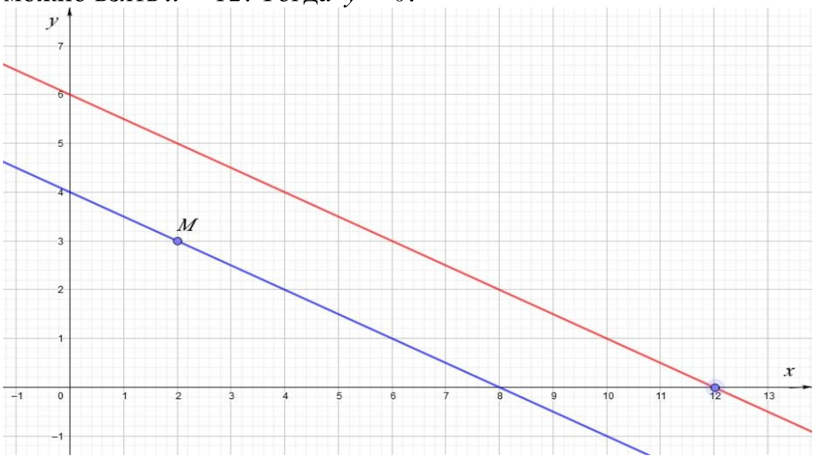


Рисунок 3.6

Мы уже говорили, что для того чтобы начертить прямую, достаточно иметь две точки. Следовательно, для того чтобы написать уравнение прямой достаточно знать координаты двух точек, лежащих на этой прямой.

Упражнение 3.6

С. Напишите уравнение прямой, которая параллельна прямой k и проходит через точку M.

a) Уравнение k: $y = 4x + 2;\ M(2;\ 6);$

b) Уравнение k: $y = -0{,}2x - 1;\ M(5;\ 3).$

Н. Напишите уравнение прямой, которая параллельна прямой k и проходит через точку M.

a) Уравнение k: $y = -2x - 1;\ M(2;\ -1);$

b) Уравнение k: $y = 3x + 6;\ M(2;\ 3).$

3.7. Задача

В 1 час 36 минут велосипедист находился на расстоянии 50 км от Бишкека, а в 5 ч он находился на расстоянии 135 км от Бишкека. На каком расстоянии от Бишкека он был 3,5 часа?
В котором часу он был на расстоянии 130 км от Бишкека? Предполагается, что он двигался с постоянной скоростью.

Решение

Движение с постоянной скоростью описывается функцией $y = mx + b$, где x выражает время, а y — расстояние. Так как единицы измерения у нас — это часы и километры, важно отметить, что 1 час 36 минут это 1,6 часа.

Подставив в функцию $y = mx + b$ координаты двух заданных точек, получим систему из двух линейных уравнений первого порядка: $\begin{cases} 50 = m16 + b; \\ 135 = m5 + b; \end{cases} <=> \begin{cases} m = 25; \\ b = 10. \end{cases}$

В результате, выяснили, что движение велосипедиста описывается функцией $y = 25x + 10,$ где 25 — скорость в км/час. Отсюда несложно выяснить, что в 3 часа 30 минут он был на расстоянии: $y = 25 \cdot 3{,}5 + 10 = 97{,}5$ километров от Бишкека, а на расстоянии 130 км от Бишкека он был в: $130 = 25x + 10 \Leftrightarrow x = 4{,}8$ часов.

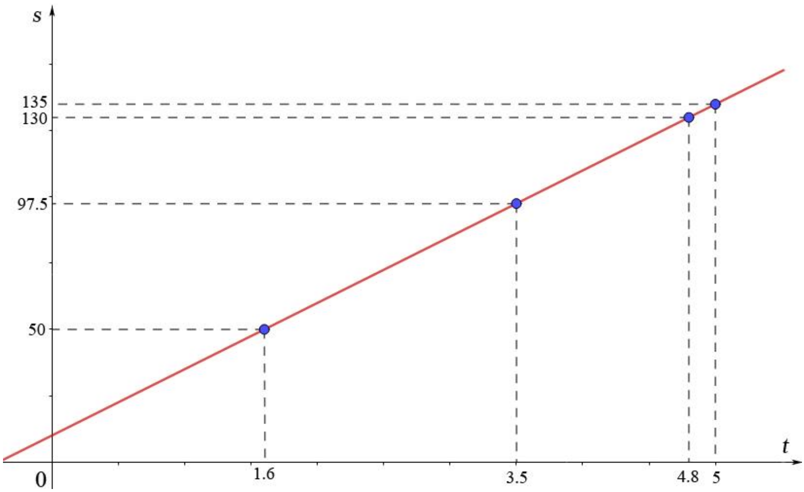


Рисунок 3.7

Упражнение 3.7

С. При цене 70 сомов на рынке предлагают 25 тонн бананов, при цене 90 сомов — 30 тонн. Нарисуйте прямую проходящую через эти точки. Напишите линейную функцию предложения бананов, выразив цену через объем предложения.

При цене 77 сомов на рынке готовы купить 32 тонн бананов, при цене 72 сомов — 36 тонн. Нарисуйте прямую проходящую через эти точки. Напишите линейную функцию спроса на бананы, выразив цену через объем предложения.

Определите равновесную цену и равновесный объем на этом рынке.

Н. При цене 160 сомов на рынке предлагают 2 тонны печенья, при цене 135 сомов — 1,6 тонн. Нарисуйте прямую проходящую через эти точки. Напишите линейную функцию предложения печенья, выразив цену через объем предложения.

При цене 175 сомов на рынке готовы купить 1,42 тонны печенья, при цене 153 сомов — 1,97 тонн. Нарисуйте прямую проходящую через эти точки. Напишите линейную функцию спроса на печенье, выразив цену через объем предложения.

Определите равновесную цену и равновесный объем на этом рынке.

3.8. Задача

Поезд покинул город А в 1 час и прибыл в город Б в 7 часов. В 10:30 другой поезд, который отправился из Б в 1:30, прибыл в А. Определите, когда и на каком расстоянии от А встретились поезда, если расстояние между этими городами составляет 360 километров.

Решение

В задачах с аналогичным содержанием по умолчанию предполагается, что движение происходит с постоянной скоростью. Следовательно, можно сказать, что между связь между пройденным расстоянием и временем описывается линейной функцией $y = mx + b$. В данном случае эту функцию удобнее написать в виде $s = vt + s_0$. Здесь s — расстояние; v — скорость; t — время; s_0 — «местоположение объекта в начальный момент времени». Рассмотрим A как начальную точку. В координатной плоскости ($t; s$) движение 1–го поезда описывается прямой линией EL, определяемой точками E(1; 0) и L(7; 360), а 2–го поезда — прямой SR, определяемой точками S(1,5; 360) и R(10,5; 0).

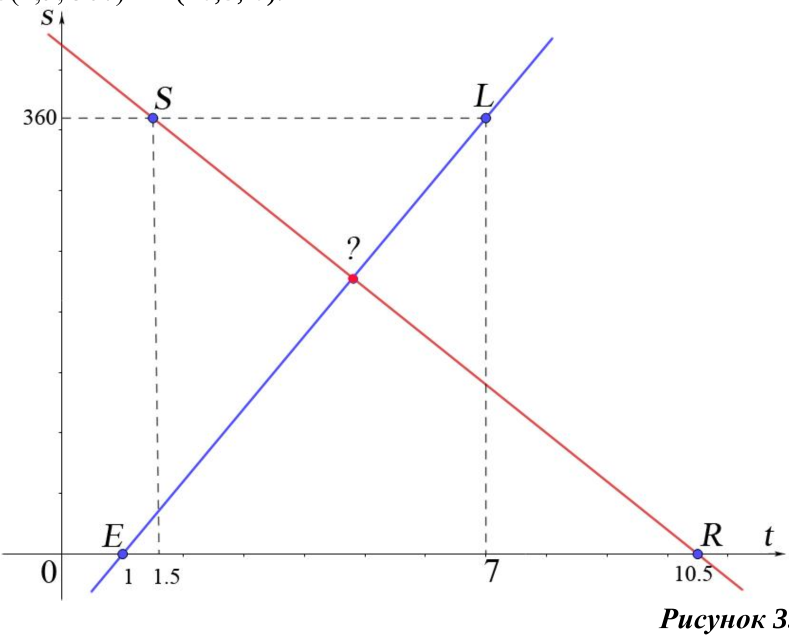


Рисунок 3.8

Для того чтобы получить уравнение прямой EL в виде $s = vt + s_0$, используем координаты точек E и L:

$$\begin{cases} 0 = v \cdot 1 + s_0; \\ 360 = v \cdot 7 + s_0; \end{cases} <=> \begin{cases} s_0 = -v \cdot 1; \\ 360 = v \cdot 6; \end{cases} <=> \begin{cases} s_0 = -60; \\ v = 60. \end{cases}$$

Итак, выяснилось, что первый поезд двигается со скоростью 60 км/ч и его движение описывается равнением $s = 60t – 60$.

Точно, также поступим с прямой SR:

$$\begin{cases} 360 = v \cdot 1{,}5 + s_0; \\ 0 = v \cdot 10{,}5 + s_0; \end{cases} <=> \begin{cases} 360 = v \cdot 1{,}5 + s_0; \\ 360 = -9v; \end{cases} <=> \begin{cases} s_0 = 420; \\ v = -40. \end{cases}$$

Таким образом, расстояние между городом A и вторым поездом определяется уравнением $s = –40t + 420$. Знак минус перед значением скорости указывает на то, что второй поезд движется в направлении противоположном движению первого поезда.

Координаты точки встречи поездов являются решением соответствующей системы:

$$\begin{cases} s = 60t - 60, \\ s = -40t + 420, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s = 60t - 60, \\ 60t - 60 = -40t + 420, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} s = 60t - 60, \\ 100t = 480, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s = 60 \cdot 4{,}8 - 60 = 228, \\ t = 4{,}8. \end{cases}$$

Таким образом, поезда встретились в 4,8 часов, что означает 4 часа 48 минут, на расстоянии 228 км от A.

Упражнение 3.8

C. Динара начала полоть грядку в 1 час 20 минут. В 1,5 час с другого конца грядки, к работе приступил Мухтар. В котором часу они закончат полоть эту грядку? Известно, что Динара может одна прополоть такую грядку за 1 час, Мухтар — за 40 минут. ***Указание*** Обозначьте начальную точку для Мухтара через (90; F), где время дано в минутах. Тогда конечная точка для Динары будет (140; F).

H. Из города Бишкек в 3 часа выехал автобус и преодолев 180 км прибыл в город Балыкчи в 7 часов. В 4 часа 36 минут автобус встретил автомобиль, который выехал из Балыкчи в 3 часа 15 минут. На каком расстоянии от Бишкека они встретились? В котором часу автомобиль прибыл в Бишкек?

Итоговые упражнения

1. Бригада швей за 2 часа сшила 14 сорочек, за 5 часов — 35 сорочек. Сколько сорочек было сшито за 4 часа? За сколько часов было сшито 49 сорочек? Предполагается постоянная производительность труда. Нарисуйте декартову систему координат на плоскости и отметьте на ней соответствующие точки, откладывая время по горизонтали, а количество сорочек по вертикали. Убедитесь, что через эти точки можно провести прямую.

2. В час дня на складе было 8 тонн муки, в 3 часа 30 минут 4 тонны. Напишите уравнение зависимости количества муки от времени, предполагая линейную зависимость. Нарисуйте соответствующую прямую. Сколько муки было на складе в 4 часа 15 минут? В котором часу на складе было 6,08 тонн?

3. Напишите уравнение прямой, которая параллельна прямой k и проходит через точку M.

a) Уравнение k: $y = -x + 3;$ $M(9; -9);$

b) Уравнение k: $y = 0,3x - 2;$ $M(10; 7).$

4. При цене 40 сомов на рынке предлагают 45 тонн яблок, при цене 50 сомов — 53 тонн. Нарисуйте прямую проходящую через эти точки. Напишите линейную функцию предложения яблок, выразив цену через объем предложения.

При цене 47 сомов на рынке готовы купить 52 тонны яблок, при цене 52 сомов — 48 тонн. Нарисуйте прямую проходящую через эти точки. Напишите линейную функцию спроса на бананы, выразив цену через объем предложения.

Определите равновесную цену и равновесный объем на этом рынке.

5. При цене 254,5 сомов на рынке предлагают 1,5 тонны конфет, при цене 279,5 сомов — 1,7 тонн. Нарисуйте прямую, которая проходит через эти точки. Напишите линейную функцию предложения конфет, выразив цену через объем предложения.

При цене 275 сомов на рынке готовы купить 1,4 тонны конфет, при цене 255 сомов — 1,9 тонн. Нарисуйте прямую проходящую через эти точки. Напишите линейную функцию спроса на конфеты, выразив цену через объем предложения.

Определите равновесную цену и равновесный объем на этом рынке.

6. В 2 часа 24 минуты мотоцикл находился на расстоянии 150 км от Бишкека и двигался в сторону Бишкека со скоростью
56 км/час. Напишите соответствующую функцию и определите, на расстоянии от Бишкека находился мотоцикл в 4 часа дня.

7. Из города Нарын в 1 час 36 минут выехал автобус и прибыл в город Бишкек в 8 часов. В тот же день в 2,3 часа из Бишкека выехало такси и приехало в Нарын в 7 часов 18 минут. Предполагая, что они двигались с постоянными скоростями, определите, когда они встретились.

8. Из Лукашовки и Мокроусовки, расстояние между которыми равно 16 километров, навстречу друг другу вышли Ира и Коля. Ира вышла в 1,75 часа и пришла в Мокроусовку в 5 часов 45 минут. Коля отправился в путь в 3 часа и пришел в Лукашовку в 6 часов 20 минут. Определите, когда и на каком расстоянии от Лукашовки они встретятся.

9. Жанара начала полоть грядку в 1 час 55 минут. В 2 часа, эту же грядку с другого конца начал полоть Насип. В котором часу они закончат полоть эту грядку? Известно, что Жанара может одна прополоть такую грядку за 25 минут, Насип — за 15 минут.

§4. АНАЛИЗ ЗАТРАТ—ОБЪЕМОВ—ПРИБЫЛИ (CVP ANALYSIS)

Экономические ресурсы — это одно из основных понятий экономической теории. Адам Смит рассматривал такие экономические ресурсы, как труд, земля и капитал. Однако наиболее четко теорию трех факторов производства сформулировал французский экономист Жан Батист Сэй (1767—1832). Английский экономист Альфред Маршалл (1842—1924) предложил добавить четвертый фактор — предпринимательские способности. Спор сторонников этих подходов продолжался до конца XX века. Развал Советского Союза и падение экономик постсоветских государств ярко продемонстрировал важность предпринимательских способностей. Эти страны имели труд, землю и капитал, но фактическое отсутствие предпринимательских способностей привело к резкому сокращению ВВП. Так, к 2000 году, через 10 лет после начала реформ, по переходу от командной экономики к рыночной, Латвия потеряла 36% ВВП, Литва —35% ВВП, Российская Федерация — 38% ВВП, Украина — 58% ВВП.

В то же время важно отметить, что предпринимательские способности нужно подкреплять соответствующими знаниями. К примеру, в США ежегодно регистрируется около 600 тыс. малых предприятий и ликвидируется около 500 тыс. Конечно, имеется много различных причин, объясняющих такое количество ликвидаций, но недостаток соответствующих знаний находится в числе главных.

В данном параграфе предлагается простое и наглядное введение в модель CVP (Cost – Volume – Profit), доступным образом объясняющее процесс нахождения точки перелома — BEP (break–even point). Несмотря на кажущуюся простоту, правильное определение BEP позволяет добиваться успеха в бизнесе, а ошибки могут порождать громадные убытки. Проиллюстрируем это утверждение следующим сообщением СМИ: *Airbus прекращает производство широкофюзеляжных самолетов A380. В 2021 г. он завершит их поставки. Причина — фирма не достигла BEP. Первоначально Airbus оценил точку безубыточности в 420 единиц, но к концу января 2019 года на самолеты A380 было только 316 заказов. Проект поглотил 28 миллиардов евро, что кажется невосстановимым.*

4.1. Задача

Синдбад–мореход, который возит шоколад на остров АСИНАМ, продает ящик шоколада за 12 дирхемов[1]. Чему равна выручка Синдбада–морехода, продавшего:

a) 5 b) 12,5 c) 30 d) 40 ящиков шоколада?

[1]Дирхем – старинная арабская монета.

Нарисуйте декартову систему координат на плоскости и отметьте на ней соответствующие точки. Убедитесь, что через эти точки можно провести прямую.

Решение

Выручка определяется формулой $R=12q$, где q — число проданных ящиков. Подставляя в формулу число ящиков, будем получать ответы в дирхемах:

a) $R(5) = 12\cdot 5 = 60$; b) $R(12,5) = 12\cdot 12,5 = 150$;

c) $R(30) = 12\cdot 30 = 360$; d) $R(40) = 12\cdot 40 = 480$.

Следовательно, на координатной плоскости нужно отметить точки: (5; 60), (12,5; 150), (30; 360), (40; 480), где первые координаты показывают число ящиков и отмечаются на горизонтальной оси $0q$, а вторые координаты показывают величину выручки Синдбада–Морехода и указываются на вертикальной оси $0R$.

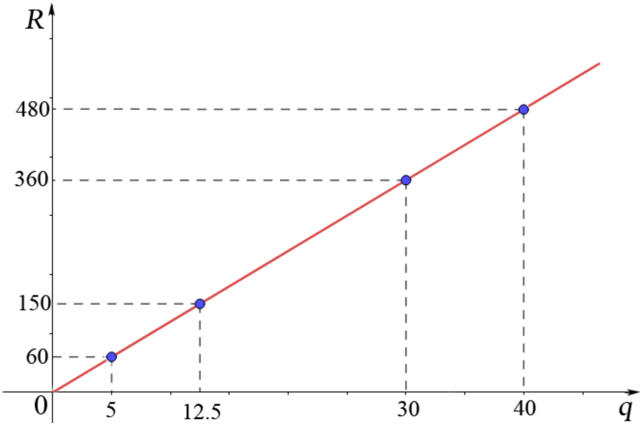


Рисунок 4.1

Приложив линейку, убедимся в том, что все эти точки лежат на одной прямой.

Упражнение 4.1

C. Айдана продает футболки с эмблемой АУЦА по цене 200 сомов. Какова выручка Айданы, продавшей: a) 25; b) 30; c) 40 футболок? Отметьте соответствующие точки в декартовой системе координат, где число футболок определяется точками горизонтальной оси. Убедитесь в том, что все эти точки лежат на одной прямой.

H. Нилуфар продает сушенные абрикосы по цене $4 за килограмм. Какова выручка Нилуфар, продавшей: a) 50; b) 65; c) 70 килограмм абрикосов? Отметьте соответствующие точки в декартовой системе координат, где число килограммов определяется точками горизонтальной оси. Убедитесь в том, что все эти точки лежат на одной прямой.

4.2. Задача

Синдбад–мореход каждый ящик шоколада покупает на материке за 8 дирхемов. Чему равны затраты Синдбада–морехода на покупку: a) 15; b) 25; c) 30; d) 40 ящиков шоколада? Нарисуйте декартову систему координат на плоскости и отметьте на ней соответствующие точки. Убедитесь, что через эти точки можно провести прямую.

Решение

Затраты на покупку соответствующего количества ящиков шоколада в общем случае называются переменными затратами. В данном случае они определяются формулой $VC = 8q$, где q — количество купленных ящиков. Подставляя в формулу число ящиков, будем получать ответы в дирхемах:

a) $VC(15) = 8 \cdot 15 = 120$; b) $VC(25) = 8 \cdot 25 = 200$;
c) $VC(30) = 8 \cdot 30 = 240$; d) $VC(40) = 8 \cdot 40 = 320$.

Таким образом, на координатной плоскости нужно отметить точки: (15; 120), (25; 200), (30; 240), (40; 320), где первые координаты показывают число ящиков и отмечаются на горизонтальной оси $0q$, а вторые координаты показывают сколько дирхемов заплатил Синдбад–Мореход за соответствующее количество ящиков шоколада и указываются на вертикальной оси $0VC$.

Приложив линейку, убедимся в том, что и в этом случае получаются точки, лежащие на одной прямой.

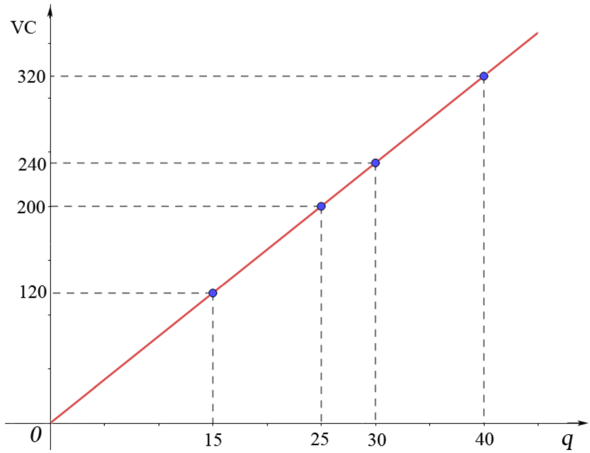


Рисунок 4.2

Упражнение 4.2

C. Айдана покупает однотонные футболки по цене 100 сомов, для того чтобы нанести эмблему АУЦА. Эта работа требует 60 на каждую футболку. Чему равны переменные затраты Айданы, которая произвела: a) 20; b) 35; c) 45 футболок с эмблемами? Отметьте соответствующие точки в декартовой системе координат, где число футболок определяется точками горизонтальной оси. Убедитесь в том, что все эти точки лежат на одной прямой.

H. Нилуфар покупает абрикосы по цене $ 1,4 за кг. Работа по сушке каждого килограмма абрикосов требует $0,6. Чему равны переменные затраты Нилуфар, которая подготовила для продажи: a) 450; b) 600; c) 900 килограммов сушенных абрикосов? Отметьте соответствующие точки в декартовой системе координат, где число килограммов определяется точками горизонтальной оси. Убедитесь в том, что все эти точки лежат на одной прямой.

4.3. Задача

Синдбад–мореход каждый ящик шоколада покупает на материке за 8 дирхемов. Постоянные расходы на каждое плавание (зарплата моряков, еда, налоги султану…) составляют 140 дирхемов. Чему равны общие затраты на плавание Синдбада, закупившего: a) 10; b) 20; c) 37,5; d) 45 ящиков шоколада? Возьмите рисунок 4.2 и отметьте на нем соответствующие точки. Убедитесь, что через эти точки можно провести прямую. На этом же рисунке нарисуйте линию, выражающую постоянные затраты. Что можно выяснить в результате совместного рассмотрения трех прямых?

Решение

Общие затраты — это сумма переменных и постоянных затрат. Поэтому, общие затраты на плавание Синбада–морехода в данном случае определяются формулой $TC=VC+FC=8q+140$, где q — количество купленных ящиков. Подставляя в формулу число ящиков, будем получать ответы в дирхемах:

a) $TC(10) = 8{\cdot}10+140= 220$; b) $TC(20)= 8{\cdot}20 + 140 = 300$;
c) $TC(37{,}5)= 8{\cdot}37{,}5+140= 440$; d) $TC(45)= 8{\cdot}45+140 = 500$.

Таким образом, на рисунке 2 нужно отметить точки: (10; 220), (20; 300), (37,5; 440), (45; 500), где первые координаты это число ящиков, а вторые координаты показывают сколько дирхемов затратил на плавание Синдбад–Мореход и указываются на вертикальной оси $0TC$.

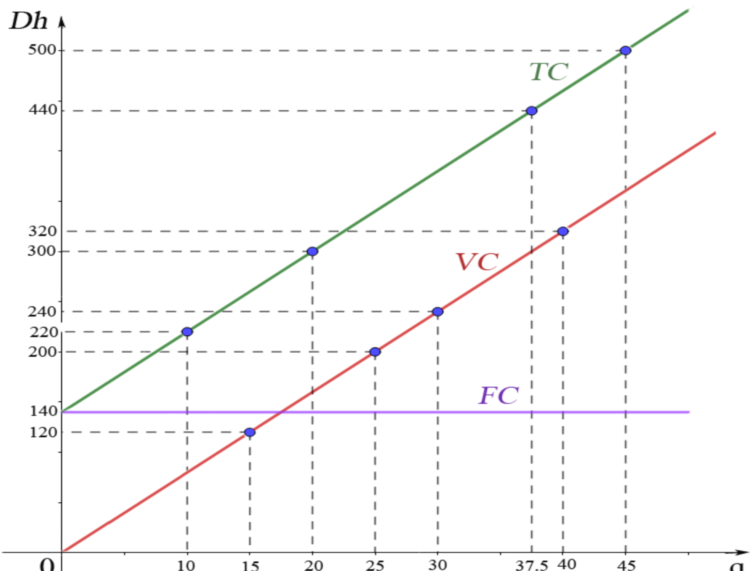


Рисунок 4.3

Приложив линейку, убедимся в том, что и в этом случае получаются точки, лежащие на одной прямой.
Так как любому числу ящиков шоколада, которые Синдбад–Мореход купил и взял собой в плавание соответствует одно и то же значение постоянных издержек, график функции постоянных издержек является горизонтальной линией $FC = 140$.
Следует, отметить, что хотя в задачах 4.2 и 4.3 на вертикальной оси отмечены переменные затраты, затем общие затраты, а далее и постоянные затраты, все они выражаются в дирхемах и поэтому могут быть отмечены на одной и той же оси на рисунке 4.3.
Нетрудно понять, что прямая, выражающая общие затраты получается параллельным сдвигом прямой, выражающей переменные затраты на величину постоянных затрат.

Упражнение 4.3

C. В условиях упражнения 4.2.C, постоянные затраты Айданы: аренда помещения, оборудования, зарплата сотрудников, ..., равны 5000 сомов. Чему равны общие затраты Айданы, которая произвела: a) 80; b) 135; c) 150 футболок с эмблемами? Нанесите соответствующие точки на рисунок к упражнению 4.2.C. Убедитесь в том, что эти точки лежат на одной прямой.

H. В условиях упражнения 4.2.H постоянные затраты Нилуфар: аренда помещения, оборудования, зарплата сотрудников, ..., равны $1300. Чему равны общие затраты Нилуфар, которая подготовила к продаже: a) 400; b) 550; c) 800 килограммов сушенных абрикосов? Нанесите соответствующие точки на рисунок к упражнению 4.2.H. Убедитесь в том, что эти точки лежат на одной прямой.

4.4. Задача

У Синдбада–морехода, который прибыл на рынок для того, чтобы купить шоколад с собой было 400 дирхемов. Каждый ящик он купил по цене 8 дирхемов. Сколько дирхемов у него осталось после покупки: a) 10; b) 22,5; c) 32,5; d) 40 ящиков шоколада? Нарисуйте декартову систему координат на плоскости и отметьте на ней соответствующие точки. Убедитесь, что эти точки лежат на одной и той же прямой.

Решение

Обозначим через M количество денег у Синдбада–морехода. Тогда $M = 400 - 8q$, где q — количество купленных ящиков. Подставляя в формулу число ящиков, будем получать ответы в дирхемах:

a) $M(10) = 400 - 8 \cdot 10 = 320$;

b) $M(22{,}5) = 400 - 8 \cdot 22{,}5 + 140 = 220$;

c) $M(32{,}5) = 400 - 8 \cdot 32{,}5 + 140 = 140$;

d) $M(40) = 400 - 8 \cdot 40 + 140 = 80$.

Отметив на координатной плоскости точки: (10; 320), (22,5; 220), (32,5; 140), (40; 80), и приложив линейку, убедимся в том, что и в этом случае получаются точки, лежащие на одной прямой. В отличие от предыдущих случаев, прямая направлена вправо–вниз.

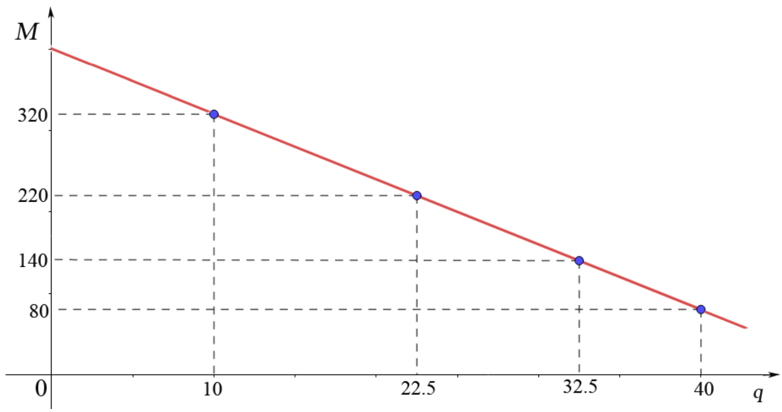


Рисунок 4.4

Упражнение 4.4

C. Айдана, которая покупает однотонные футболки по цене 100 сомов имеет 19,000 сомов. Сколько денег осталось у Айданы после покупки: a) 180; b) 125; c) 90 однотонных футболок? Нанесите соответствующие точки на декартову систему координат. Убедитесь в том, что все эти точки лежат на одной прямой. Как изменится прямая, если предположить, что Айдана имела не 19,000, а 20,500 сомов.

H. Нилуфар имеет $1,530. Сколько денег осталось у нее после покупки: a) 450; b) 600; c) 1000 килограммов абрикосов по цене

\$1,4? Нанесите соответствующие точки на декартову систему координат. Убедитесь в том, что все эти точки лежат на одной прямой. Как изменится прямая, если предположить, что Нилуфар имеет не \$1530, а \$1450.

4.5. Задача

Синдбад–мореход возит шоколад на остров АСИНАМ и продает ящик шоколада за 12 дирхемов. Каждый ящик шоколада он покупает на материке за 8 дирхемов. Постоянные расходы на каждое плавание (зарплата моряков, еда, налоги султану…) составляют 140 дирхемов. Чему равна прибыль Синдбада–морехода, продавшего на острове все привезенные с собой: a) 15; b) 30; c) 37,5; d) 45 ящиков шоколада

Решение

Прибыль $\boldsymbol{Pf}$ — это разность между выручкой и общими затратами: $\boldsymbol{Pf = R - TC}$. Ее можно подсчитать двумя способами.

Первый способ: Вычислить значения выручки и общих затрат при соответствующих количествах ящиков, а затем найти их разность. Оформим вычисления в виде таблицы.

Количество ящиков $\boldsymbol{q}$	*15*	*30*	*37,5*	*45*
Выручка $\boldsymbol{R = 12q}$	*180*	*360*	*450*	*540*
Общие затраты $\boldsymbol{TC = 8q + 140}$	*260*	*380*	*440*	*500*
Прибыль $\boldsymbol{Pf = R - TC}$	*–80*	*–20*	*10*	*40*

Второй способ: Найти функцию прибыли как разность функций выручки и общих затрат: $Pf = R–TC = 12q - (8q + 140) = 4q - 140,$ а затем найти ее значения в нужных точках:

a) $Pf(15) = 4\cdot 15 - 140 = -80$; b) $Pf(30) = 4\cdot 30 - 140 = -20$;
c) $Pf(37{,}5) = 4\cdot 37{,}5 - 140 = 10$; d) $Pf(45) = 4\cdot 45 - 140 = 40$.

Обратим внимание на то, что в точках $q = 15$ и $q = 30$ значение прибыли отрицательно — имеют место убытки, а в точках $q = 37{,}5$ и $q = 45$ значение прибыли положительно. Конечно, желательно знать значение q, которое разделяет области с отрицательной и положительной прибылью. Об этом далее.

Упражнение 4.5

С. Айдана продает футболки с эмблемой АУЦА по цене 200 сомов. Средние переменные издержки при этом равны 160 сомов, постоянные издержки равны 5000 сомов. Чему равна прибыль

Айданы, которая продала: a) 95; b) 130; c) 150 футболок? Отметьте соответствующие точки в декартовой системе координат, где число футболок определяется точками горизонтальной оси. Убедитесь в том, что все эти точки лежат на одной прямой.

H. Нилуфар продает сушенные абрикосы по цене $4 за кг. Средние переменные издержки при этом равны $2, постоянные издержки равны $1300. Чему равна прибыль Нилуфар, которая продала: a) 550; b) 600; c) 800 килограммов сушенных абрикосов? Отметьте соответствующие точки в декартовой системе координат, где число килограммов определяется точками горизонтальной оси. Убедитесь в том, что все эти точки лежат на одной прямой.

4.6. Задача

Синдбад–мореход возит шоколад на остров АСИНАМ. Постоянные расходы на каждое плавание (зарплата моряков, еда, налоги султану…) составляют 140 дирхемов. Сколько ящиков шоколада должен купить на материке за 8 дирхемов, а затем продать на острове АСИНАМ за 12 дирхемов Синдбад–мореход для того, чтобы полностью окупить все свои затраты?

Решение

Также как и при вычислении прибыли можно использовать два подхода к решению этой задачи.

Первый способ: Синдбад–мореход полностью окупит все свои затраты, если его выручка будет равна общим затратам. То есть должно иметь место равенство $\boldsymbol{R = TC}$. Итак, $12q=8q+140$. Отсюда, $q = 35$. Таким образом выяснилось, что Синдбад–мореход полностью окупит все свои затраты, если купит на материке и затем продаст на острове 35 ящиков шоколада.

Очень полезно нарисовать соответствующий рисунок. В одной и той же системе координат надо нарисовать графики функций выручки и общих затрат, задающих левую и правую части уравнения $12q = 8q+140$. Как известно, корнем уравнения является координата точки пересечения графиков.

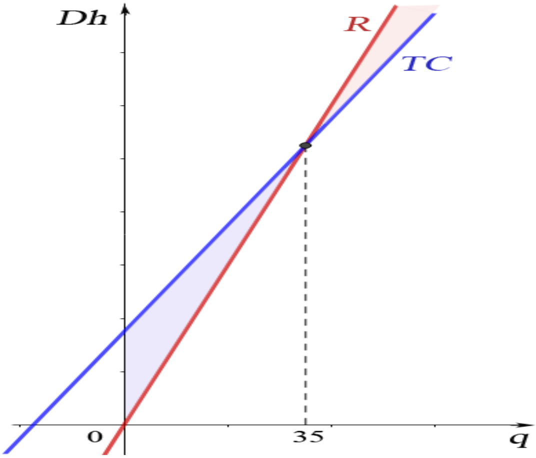


Рисунок 4.5

В экономике, первая координата точки пересечения графиков выручки и общих затрат называется точкой перелома (break–even point). Она делит ось [0; ∞) на зону убытков и зону прибыли.

Второй способ: Нужно выписать функцию прибыли как разность функций выручки и общих затрат: $Pf = R - TC =$ $=12q - (8q + 140) = 4q - 140$, а затем приравнять ее к нулю: $4q - 140 = 0$. Корень этого уравнения определяет точку перелома.

Нарисуем график функции прибыли $Pf = 4q - 140$.

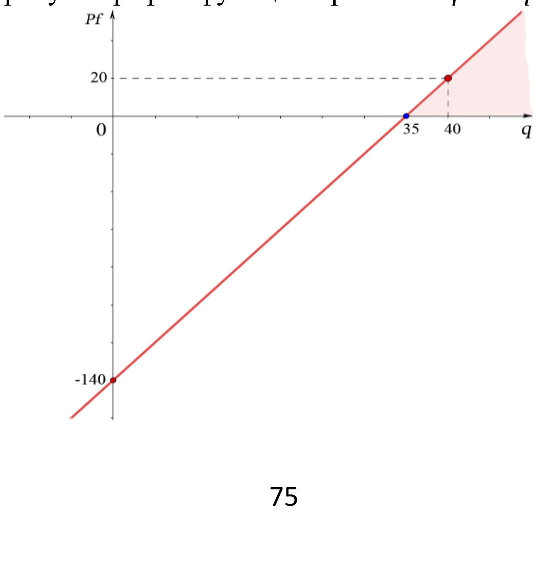


Рисунок 4.6

Напомним, что любая прямая определяется двумя точками — нужно отметить две точки, приложить линейку и провести прямую. В качестве одной из точек, определяющих прямую $y = mx + b$, удобно брать значение коэффициента b, а вторую точку можно получить придав какое–то значение аргументу x. В нашем случае $b = -140$, а вторую точку получим, взяв $q = 40$: $Pf(40) = 4{\cdot}40 - 140 = 20$.

Эта очень простая, с точки зрения математики модель, является очень важной с точки зрения бизнеса. Наш Синдбад–Мореход, прежде чем начнет покупать шоколад и нанимать команду моряков, должен, хотя бы примерно, найти точку перелома. Ему следует начинать это дело только в том случае, если есть уверенность в том, что удасться продать количество шоколада превышающее значение точки перелома.

Упражнение 4.6

C. В условиях упражнения 4.5.C, определите сколько футболок должна изготовить и продать Айдана, для того чтобы окупит все свои затраты?

H. В условиях упражнения 4.5.H, определите сколько килограммов абрикосов должна высушить и продать Нилуфар для того чтобы окупит все свои затраты?

4.7. Задача

Султану, во владениях которого работает Синдбад–мореход, понадобились деньги для покупки украшений для любимой жены. Поэтому он повысил налоги. В результате постоянные расходы на каждое плавание увеличились до 170 дирхемов. Остальные данные не изменились: Синдбад–мореход каждый ящик шоколада покупает на материке за 8 дирхемов и продает на острове АСИНАМ за 12 дирхемов.

Сколько ящиков шоколада Синдбад–мореход закупил и продал во время очередного плавания, если:

a) он вернул затраченные деньги;

b) он получил прибыль, равную 40 дирхемам;

c) его убытки составили 22 дирхема?

Решение

По сравнению с предыдущей ситуацией поменяется только функция общих затрат: вместо $TC = 8q + 140$ будет $TC_1 = 8q + 170$. Удобно использовать второй подход из предыдущей задачи. Выпишем функцию прибыли как разность функций выручки и общих затрат: $Pf = R – TC_1 = 12q – (8q + 170) = 4q – 170$, а затем приравнять ее к нужному значению. В итоге, получаем три уравнения:

a) он вернул затраченные деньги ⇔ $4q – 170 = 0$;

b) он получил прибыль 40 дирхемов, то есть $4q – 170 = 40$;

c) его убытки составили 22 дирхема, то есть $4q – 170 = –22$.

Решив эти уравнения, мы узнаем, что

a) он вернул затраченные деньги, если закупил и продал *42,5* ящика шоколада;

b) он получил прибыль, равную 40 дирхемам, если закупил и продал *52,5* ящика шоколада;

c) его убытки составили 22 дирхема, если он сумел закупить и продать только *37* ящиков шоколада.

Нарисуем графики функций прибыли и увидим, что изменение свободного члена — в данном случае 140 на 170, приводит к параллельному сдвигу прямой.

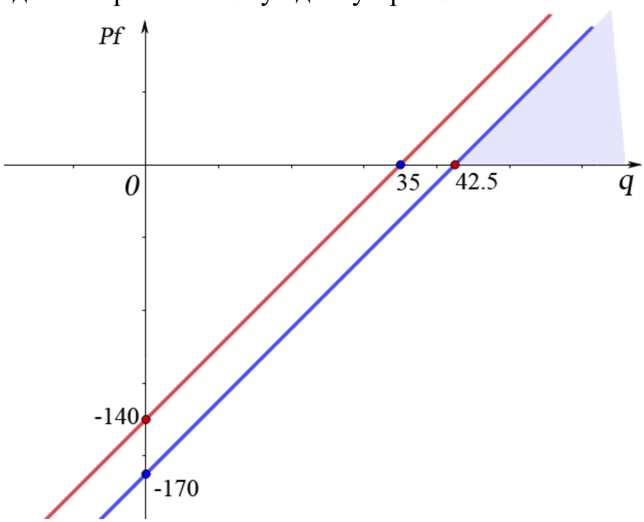


Рисунок 4.7

С точки зрения экономики получаем очевидную вещь — повышение прибыли увеличивает зону убытков и соответственно, сужает зону прибыли.

Упражнение 4.7

С. В условиях упражнения 4.5.С, собственник помещения увеличил арендную плату на 600 сомов. Определите, сколько футболок изготовила и продала Айдана, если:

a) она окупила все затраты; b) получила прибыль 1000 сомов;
c) ее убытки составили 240 сомов.

Н. В условиях упражнения 4.5.Н, стоимость аренды оборудования увеличилась на $44. Определите, сколько килограммов абрикосов высушила и продала Нилуфар, если:

a) она окупила все затраты; b) получила прибыль $100;
c) ее убытки составили $24.

4.8.Задача

Узнав о покупке украшений для любимой жены, остальные жены султана устроили демонстрацию протеста, в результате чего султан пообещал украшения и им, в очередной раз повысив налоги. В результате, теперь расходы на каждое плавание (постоянные расходы) Синдбада–морехода равны 180 дирхемов. К тому же, в результате повышения налога, подорожал и шоколад. По какой цене покупал ящик шоколада Синдбад–мореход, закупивший 50 ящиков, на этот раз, если его общие расходы составили 600 дирхемов?

Решение

Как уже говорилось, общие затраты определяются формулой $TC = FC + VC$, где величина переменных затрат определяется формулой $VC = AVC \cdot q$. Здесь AVC — затраты на приобретение единицы товара, q — количество приобретенного товара. Итак, из условий задачи получаем: $600 = 180 + AVC \cdot 50.$ Таким образом выясняется, что Синдбад–мореход за каждый ящик шоколада заплатил: $(600 – 180)/50 = 8,4$ дирхема.

Упражнение 4.8

С. В результате введения нового налога постоянные издержки Айданы выросли на 800 сомов. Переменные издержки также выросли. Чему равны теперь средние переменные затраты изготовления футболки с эмблемой АУЦА, если общие затраты на изготовление 120 футболок равны 26440 сомов?

Н. В результате введения нового налога постоянные издержки Нилуфар выросли на \$140. Переменные издержки также выросли. Чему равны теперь переменные затраты изготовления килограмма сушенных абрикосов, если общие затраты изготовления 750 кг составили \$3165?

4.9. Задача

Зухра во время летних каникул решила поработать продавцом мороженного. На фирме ей предлагают два варианта оплаты. Согласно первому варианту, она будет получать по 60 курушей (Куруш равен 1/100 лиры.) за каждую проданную порцию. По второму варианту Зухра не получит ничего за первые 30 порций и по 96 курушей за каждую последующую проданную порцию. Какое решение должна принять Зухра?

Решение

Доход Зухры (в курушах), если она примет первый вариант, будет выражаться функцией $Y = 60q$, где q число порций мороженного, проданных Зухрой. Во втором случае: $Y = 96(q - 30)$. Решение становится понятным, если нарисовать графики функций $Y = 60q$ и $Y = 96q - 2880$.

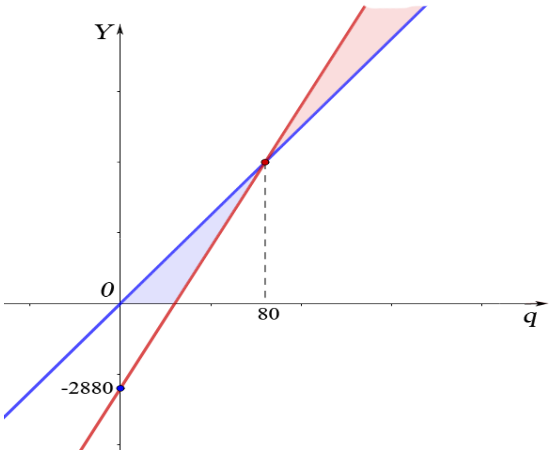


Рисунок 4.8

Итак, если Зухра считает, что ей не удастся продавать более 80 порций мороженного в день, то ей лучше согласиться на первый вариант оплаты, в противном случае — предпочтителен второй вариант. Понятно, что число 80 является корнем уравнения $60q = 96q - 2880$.

Упражнение 4.9

С. Айша во время каникул решила поработать продавцом гамбургеров. Ей предлагают два варианта оплаты. По первому варианту она получит по 4,5 сома за каждую проданную порцию. По второму варианту она не получит ничего за первые 6 проданные порции и по 7 сомов за каждую последующую проданную порцию. Какое решение должна принять Айша?

Н. Салим во время каникул решил поработать, сдавая велосипеды в аренду. Ему предлагают два варианта оплаты.

По первому варианту он получит по 22 сома за каждый час сданного в аренду велосипеда. По второму варианту он не получит ничего за первые 9 часов и по 33 сома за каждый последующий час аренды. Какое решение должен принять Салим?

4.10. Задача

Два издательства предлагают Тунжеру издать его новую книгу. Первое обещает платить по \$8 за каждую книгу из первых проданных 2000 книг, и по \$15 за каждую последующую проданную книгу. Второе издательство не будет ничего платить за первые 500 проданных книг и по \$12 за каждую последующую проданную книгу. Какое решение должен принять Тунжер?

Решение

Доход Тунжера (в долларах), если он примет первый вариант, будет выражаться функцией $Y = \begin{cases} 8q, & 0 \le q \le 2000; \\ 15q + b, & q > 2000 \end{cases}$,

где q число проданных книг. Доход Тунжера при числе проданных книг превышающем 2000 выражается функцией

$Y = 15q + b$. Значение коэффициента b можно определить из условия «стыка» звеньев функции дохода Тунжера:

$8 \cdot 2000 = 15 \cdot 2000 + b$. Отсюда, $b = -14000$.

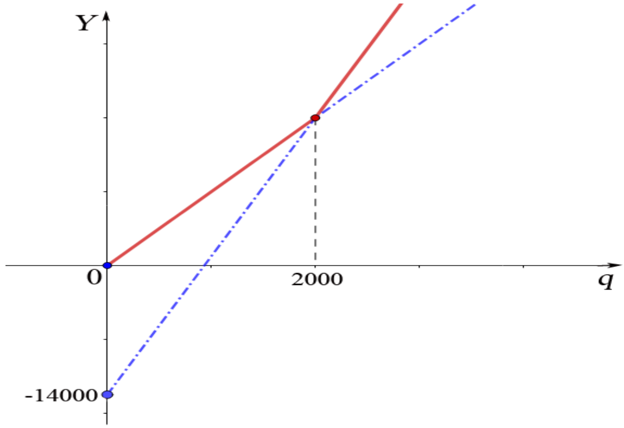


Рисунок 4.9

Во втором случае: *Y = 12(q – 500)*. Теперь возьмем рисунок 4.9 и дорисуем на нем график функции *Y = 12(q – 500) = 12q – 6000.*

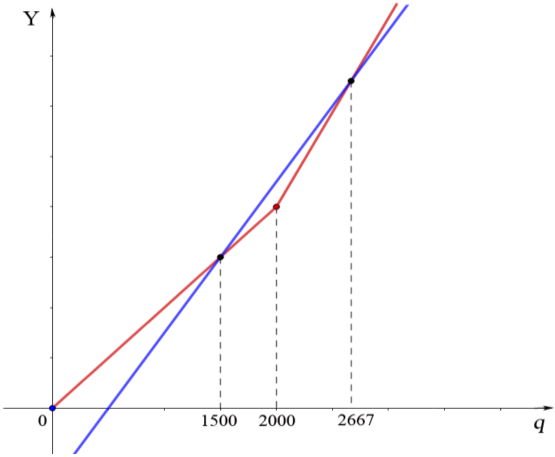


Рисунок 4.10

Получаем две точки пересечения. Первая, определяется пересечением графиков функций *Y = 8q* и *Y = 12q – 6000.* Понятно, что в этом случае *q = 1500.* Вторая — графиками функций *Y=15q – 14000* и *Y=12q – 6000.* В этом случае *q ≈ 2667.*
Таким образом, если Тунжер ожидает маленький или очень большой спрос на книгу (при *0 ≤ q ≤ 1500* или *2667 ≤ q*), ему

следует выбрать первое издательство, в противном случае — предпочтителен второй вариант.

Упражнение 4.10

С. Айлин во время каникул решила поработать продавцом хотдогов. Ей предлагают два варианта оплаты. По первому варианту она получит по 4 сома за каждый из первых 35 проданных хотдогов и 5 сомов за каждый последующий проданный хотдог. По второму варианту она не получит ничего за первые 5 проданных хотдогов и по 4,8 сомов за каждый последующий проданный хотдог. Какое решение должна принять Айлин?

Н. Два издательства предлагают Саиду издать его новую книгу. Первое обещает платить по $15 за каждую книгу из первых проданных 1600 книг, и по $24 за каждую последующую проданную книгу. Второе издательство не будет ничего платить за первые 300 проданных книг и по $19 за каждую последующую проданную книгу. Какое решение должен принять Саид?

4.11. Задача

Фирма покупает футболки, наносит на них виды Антальи и продает по цене 6 лир. Постоянные расходы (разрешение на деятельность, реклама, …) стоит 5700 лир. Первые 2250 футболок фирма может купить по цене 3,5 лиры, последующие она может купить со скидкой за 3,2 лиры. Определите точку перелома.

Решение

Выручка определяется формулой $R = 6q$, где q число проданных футболок.

Функция общих затрат будет иметь вид $Y = \begin{cases} 3{,}5q + 5700, \ 0 \le q \le 2250; \\ 3{,}2q + b, \ q > 2250, \end{cases}$ где q число купленных футболок.

Расходы при покупке большого количества футболок выражается функцией $Y = 3{,}2q + b$, где значение коэффициента b можно определить из условия «стыка» звеньев функции затрат: $3{,}5 \cdot 2250 + 5700 = 3{,}2 \cdot 2250 + b$. Отсюда, $b = 6375$.

Значение точки перелома зависит от того, с каким звеном линии общих затрат пересекается линия выручки. Если точка перелома на первом звене, то она является решением уравнения $6q = 3{,}5q + 5700$. Корень $q = 2280$ не принадлежит множеству $q \leq 2250$ и поэтому не может быть точкой перелома. Следовательно, точка перелома определяется пересечением линии выручки и второго звена линии общих затрат — решением уравнения $6q = 3{,}2q + 6375$. Корень уравнения $q \approx 2276{,}8$ указывает на то, что фирма должна заниматься этим видом бизнеса только в том случае, если она уверена в том, что сумеет изготовить и продать более 2276 футболок с видами Антальи.

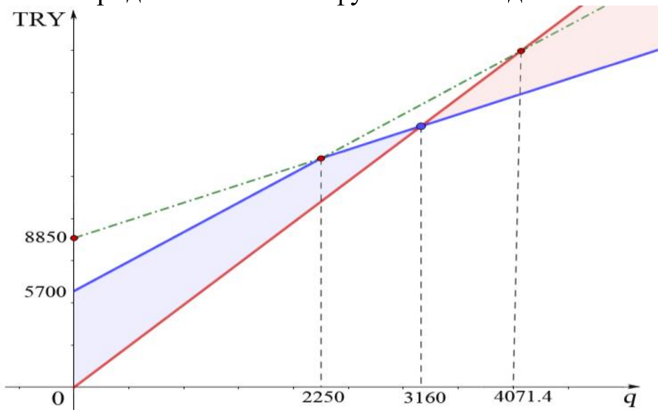


Рисунок 4.11

Упражнение 4.11

С. Затраты на производство и продажу нового вида товара равны \$1480. Начертите график и определите зону прибыли, зная что средние переменные издержки для первых 850 единиц равны \$5,04, для последующих \$5,6, а цена равна \$6,1.

Н. Затраты на производство и продажу нового вида товара равны \$1564. Начертите график и определите зону прибыли, зная что средние переменные издержки для первых 440 единиц равны \$5,5, для последующих \$5,2, а цена равна \$8,4.

4.12. Задача

Из предыдущих рассмотрений может сложиться ложный вывод: чем больше производим и продаем, тем лучше.

Любая фирма может увеличивать объемы продаж не меняя цену только в том случае, если она занимает незначительную долю рынка. В обычной ситуации, увеличить объем продаж можно только уменьшив цену.

Задача

Алладин изготавливает и продает лампы по цене $p=4–0,05q$ динаров, где q — число проданных ламп. Постоянные расходы Алладина (аренда мастерской, налоги султану…) составляют 1,1 динаров, затраты на производство одной лампы равны 20 динаров. Сколько ламп должен изготовить и продать Алладин для того, чтобы получить прибыль?

Решение

Также как и в линейном случае существуют два подхода к решению этой задачи.

Первый способ: Алладин полностью окупит все свои затраты, если его выручка будет равна общим затратам.

То есть должно иметь место равенство $\boldsymbol{R = TC}$:

$(4 – 0,05q)q = 1,1q + 20.$ Очень полезно нарисовать графики функций выручки и общих затрат, задающих левую и правую части уравнения $4q – 0,05q^2 = 1,1q + 20.$

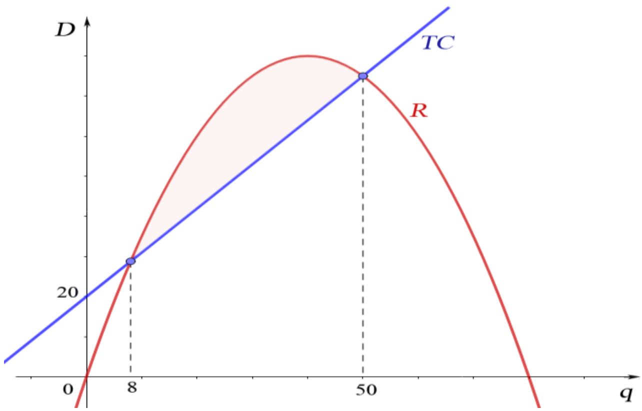


Рисунок 4.12

Итак, $q_1 = 8;$ $q_2 = 50.$ Таким образом выяснилось, что Алладин получит прибыль, если он изготовит и продаст от 8 до 50 ламп.

Второй способ: Нужно выписать функцию прибыли как разность функций выручки и общих затрат:

$Pf = R – TC = (4 – 0,05q)q – (1,1q + 20) = – 0,05q^2 + 2,9q – 20,$ а затем приравнять ее к нулю. Корни полученного уравнения определяют зону прибыли: [8; 50].

Нарисуем график функции прибыли, которая является перевернутой параболой:

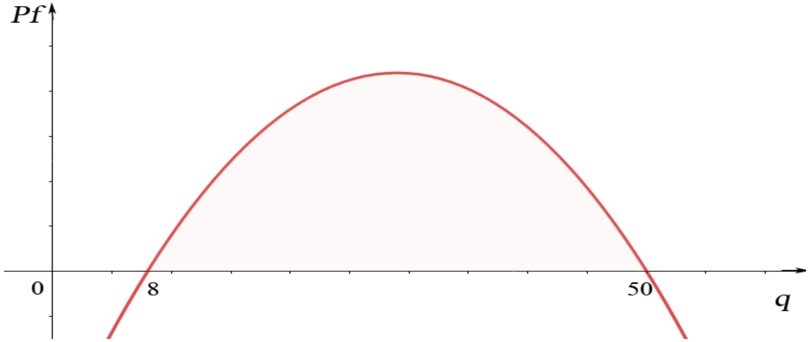


Рисунок 4.13

Эта математическая модель показывает, что нужно произвести и продать больше определенного числа единиц товара, для того чтобы покрыть постоянные расходы. В то же время, для того чтобы продать большое количество товара нужно снизить цену, которая с некоторого момента перестанет покрывать переменные затраты.

Упражнение 4.12

С. Затраты на производство и продажу нового вида товара равны $5780. Начертите график и определите зону прибыли, зная что средние переменные издержки равны $6,15, а цена (в $) определена функцией $p = 28,25 – 0,02q$.

Н. Затраты на производство и продажу нового вида товара равны $4620. Начертите график и определите зону прибыли, зная что средние переменные издержки равны $5, а цена (в $) определена функцией $p = 24,4 – 0,02q$.

4.13. Задача

Издержки подготовки к выпуску новой модели брюк 24 000 сомов. Определить зону прибыли, зная, что средние переменные издержки производства пары брюк 500 сом, а продают их по цене 600 сом.

Для того чтобы решить задачу составим функцию выручки (*revenue*)

$$R = 600q \text{ (}q\text{ – объем продаж)} \qquad (4.1)$$

и функцию издержек (*cost function*)

$$C = 24000 + 500q \text{ (}q\text{ – объем производства).} \qquad (4.2)$$

Функции R и C являются линейными.

В общем виде линейная функция (*linear function*) записывается

$$y = kx + b. \qquad (4.3)$$

Характерный признак линейной функции – ее график на плоскости есть прямая линия.

Коэффициент k равен тангенсу угла между осью OX и прямой (4.3). Его обычно называют *угловым коэффициентом*, или проще, *наклоном (slope)*. При $k > 0$ линейная функция является растущей, при $k < 0$ – убывающей, при $k = 0$ ее график есть горизонтальная линия. Наклон функции (4.1) есть цена (*price*) товара, а функции (4.2) — средние переменные издержки *(AVC – average variable cost)*. Если средние переменные издержки постоянны, то они совпадают с предельными издержками (*MC – marginal cost*).

Коэффициент b – *свободный член* – равен координате точки пересечения прямой (4.3) с осью *ОУ*. В частности, функция R проходит через начало координат, а функция С через точку (*0; 24 000*) определяемую значением постоянных издержек (*FC – fixed cost*).

Объем производства и продажи q, при котором функция прибыли

$$Pf = R - C \qquad (\textit{profit}) \qquad (4.4)$$

принимает неотрицательное значение, называется точкой прибыли. Множество точек прибыли образует *зону прибыли*. Отрицательным значениям функции отвечает *зона убытков*.

Точки разделяющие зону прибыли и зону убытков называются *точками перелома* (break–even points).

Замечание В русскоязычной литературе, термин *break–even point* обычно переводят как *точка безубыточности*. По нашему мнению, словосочетание *точка перелома* более точно отражает смысл.

Вернемся к задаче. Зная о том, что на границе зоны прибыли объем выручки совпадает с объемом издержек, найдем эту границу: $600q = 24000 + 500q \Rightarrow q = 240$.
Соответствующий чертеж наглядно показывает, что фирма должна произвести и продать более 240 единиц товара для того чтобы иметь прибыль. При этом, чем больше объем, тем больше прибыль.

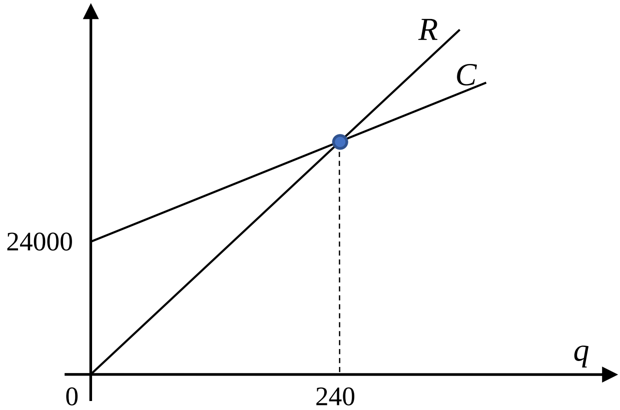


Рисунок 4.14

Упражнение 4.13

С. Затраты на производство и продажу нового вида товара равны $780. Начертите график и определите зону прибыли, если средние переменные издержки равны $6,15, а цена равна $7,65.

Н. Затраты на производство и продажу нового вида товара равны $4650. Начертите график и определите зону прибыли, зная, что средние переменные издержки равны $45, а цена равна $57.

4.14. Задача LS

Как изменится решение задачи ***4.13,*** *если необходимо дополнительно учесть паушальный налог величиной 5000 сомов.*

Паушальный налог (lump sum tax) взимается в виде некоторой фиксированной денежной суммы. У нас он, обычно, рассматривается как плата за патент.

Необходимость выплаты паушального налога фирма воспринимает как дополнительные постоянные издержки.

В результате, меняется функция издержек: $C_L = 24000 + 500q + 5000$. Соответственно, точка перелома удовлетворяет уравнению $600q = 29000 + 500q$ и равна 290.

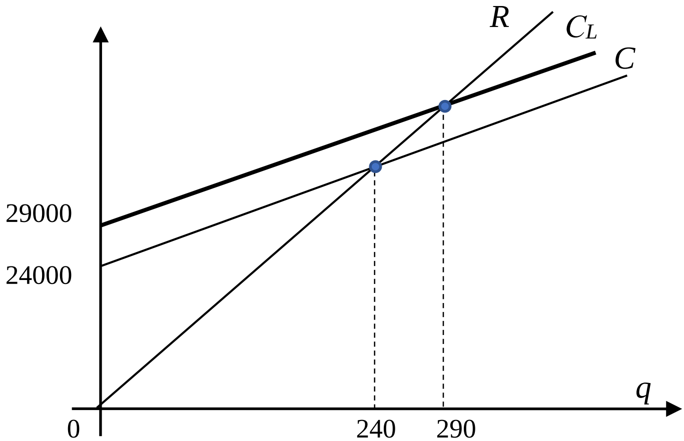


Рисунок 4.15

(Как было сказано выше, изменение свободного члена линейного уравнения приводит к параллельному сдвигу прямой.)

Итак, паушальный налог, как и следовало ожидать, требует увеличить объем производства и продаж для достижения зоны прибыли.

Упражнение 4.14

С. Как изменится решение задачи 4.13.С, если принять во внимание дополнительный паушальный налог $45.

Н. Как изменится решение задачи 4.13.Н, если принять во внимание дополнительный паушальный налог $150.

4.15. Задача Е

*Как изменится решение задачи **4.13**, если необходимо дополнительно учесть акцизный налог величиной 20 сомов.*

Акцизный налог (excise tax) есть некоторая фиксированная денежная сумма, которая выплачивается с каждой проданной единицы товара или услуги. Введение или изменение акцизного налога приводит к соответствующему изменению предельных издержек *MC*.

Если предельные (*marginal*) издержки *MC* постоянны, то они совпадают со средними переменными издержками. Поэтому, $AVC_E = 500+20$. Тогда, $C_E = 24000 + 520q$. И как следствие, точку перелома находим из уравнения $600q = 24000 + 520q \Rightarrow q = 300$.

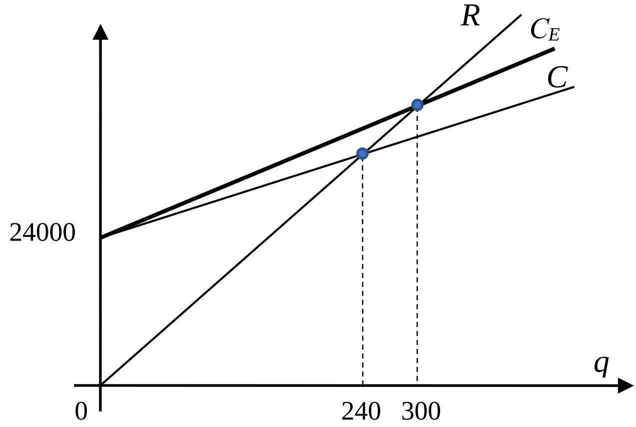


Рисунок 4.16

(Изменение коэффициента функции издержек изменило наклон соответствующей линии.)

Упражнение 4.15

С. Как изменится решение задачи 4.13.С, если принять во внимание дополнительный акцизный налог \$0,3 на единицу товара.

Н. Как изменится решение задачи 4.13.Н, если принять во внимание дополнительный акцизный налог \$2,7 на единицу товара.

4.16. Задача

Если рассматривать только задачи вышеуказанного типа, то можно прийти к ложному выводу «Чем больше произведено, тем лучше». Поэтому, наряду с такими задачами необходимо рассматривать и задачи, в которых цена зависит от объема продаж.

Задача

Издержки подготовки к выпуску новой модели телевизора \$210 000. Определите зону прибыли, зная, что *средние переменные издержки производства телевизора $400, а цена определяется функцией p=1400– q.*

При решении этой задачи поступим так же, как и при решении задачи 4.13: составим функцию выручки

$$R = (1400 - q)q, \tag{4.5}$$

и функцию издержек

$$C = 210000 + 400q. \tag{4.6}$$

Функция (4.5) есть частный случай квадратичной (*quadratic*) функции, которая в общем виде записывается

$$y = mx^2 + kx + b. \tag{4.7}$$

График квадратичной функции на плоскости есть парабола, направленная ветвями вверх при $m > 0$: $\cup$
и ветвями вниз при $m < 0$: $\cap$.

При построении графика параболы полезно помнить о том, что коэффициент *b – свободный член* равен координате точки пересечения параболы (4.7) с осью *OУ* , а x_1 и x_2 — корни уравнения $mx^2 + kx + b = 0$ определяют координаты точек пересечения параболы (4.7) с осью *OX.*

Значения x_1 и x_2 можно найти из формул

$x_1 = \dfrac{-k - \sqrt{D}}{2m}$ и $x_2 = \dfrac{-k + \sqrt{D}}{2m}$, где $D = k^2 - 4mb$.

Если $D < 0$ и $m > 0$ парабола расположена над горизонтальной осью $\underline{\cup}$, если $D < 0$ и $m < 0$ под нею: $\overline{\cap}$.

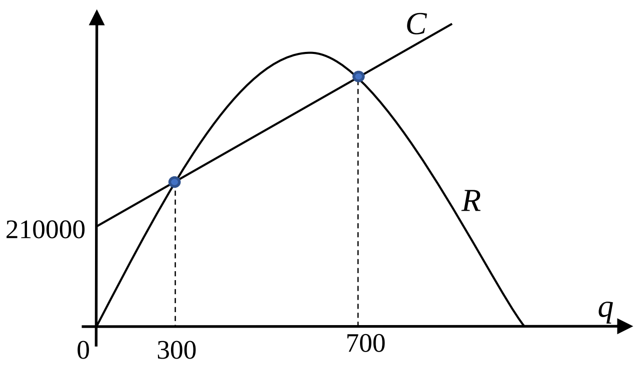


Рисунок 4.17

Приравняв функции (4.5) и (4.6) $(1400 - q)q = 210000 + 400q$ придем к квадратному уравнению $-q^2 + 1000q - 210000 = 0,$ которое имеет корни $q = 300$ и $q = 700.$ Из чертежа видно, что чтобы иметь прибыль фирма должна произвести и продать более 300 единиц товара, но в то же время объем производства не дожен превышать 700 единиц. При этом, нижняя граница, в основном, показывает, сколько нужно продать, для того чтобы покрыть фиксированные затраты, а верхняя граница говорит о том, что для того чтобы продать товар в количествах превышающих это число, придется назначать слишком низкую цену.

Упражнение 4.16

С. Затраты на производство и продажу нового вида товара равны \$5400. Начертите график и определите зону прибыли, зная, что средние переменные издержки равны \$9, а цена (в \$) определяется функцией $p = 30 - 0{,}02q$.

Н. Затраты на производство и продажу нового вида товара равны \$11550. Начертите график и определите зону прибыли, зная, что средние переменные издержки равны \$12,5, а цена (в \$) определяется функцией $p = 61 - 0{,}05q$.

4.17. Задача Pf

*Как изменится решение задачи **4.16**, если необходимо дополнительно учесть налог на прибыль 20 %.*

Так как величина посленалоговой прибыли равна $Pf_1 = (1- 0{,}2)Pf$, а уравнение, определяющее границы зоны прибыли $(1 - 0{,}2)Pf = 0$ эквивалентно уравнению $Pf = 0,$ решение задачи совпадает с решением задачи без налога. Меняется только величина посленалоговой прибыли. Поэтому, налог с прибыли, теоретически, не влияет на объем рынка. Отличие теории с практикой обуславливается тем, что, к сожалению, налог с прибыли взимается не с экономической, а бухгалтерской прибыли.

Упражнение 4.17

С. Как изменится решение задачи 4.16.С, если принять во внимание дополнительный налог на прибыль 30%?

Н. Как изменится решение задачи 4.16.Н, если принять во внимание дополнительный налог на прибыль 10%?

4.18. Задача

Издержки подготовки к выпуску и продаже нового вида товара \$5000. Определите зону прибыли, зная, что средние переменные издержки для первых 128 единиц равны \$10, для последующих \$12,5, а цена \$60.

Составим функцию выручки $R = 60q$ и функцию полных издержек для первых 128 единиц товара $C = 5000 + 10q$. Из уравнения $60q = 5000 + 10q$ получим, что решение задачи **(**$100; +\infty$**).**

Упражнение 4.18

С. Затраты на производство и продажу нового вида товара равны \$330. Начертите график и определите зону прибыли, зная, что средние переменные издержки для первых 320 единиц равны \$5, для последующих \$4,6, а цена равна \$6,2.

Н. Затраты на производство и продажу нового вида товара равны \$920. Начертите график и определите зону прибыли, зная, что средние переменные издержки для первых 500 единиц равны \$4,4, для последующих \$4,7, а цена равна \$6,7.

4.19. Задача LS

Как изменится решение задачи ***4.18,*** *если необходимо дополнительно учесть паушальный налог величиной \$2920.*

Введение налога меняет функцию издержек:
$C_L = 5000 + 10q + 2920$. Тогда, решением уравнения
$60q = 7920 + 10q$ является $q = 158,4$. Но это число не определяет зону прибыли, так как функция C_L определяет издержки только для 128 первых единиц товара, а у нас получилось $158,4$. Для того чтобы получить правильный ответ построим функцию издержек для остальных значений q. Так как полные издержки 128 единиц товара равны $7920+10\cdot 128=9200$, а средние переменные издержки для последующих единиц товара равны 12,5, соответствующую функцию можно определить подставив координаты точки (128; 9200) в равенство $C_{L1} =12,5q + b$:

$9200 = 12{,}5 \cdot 128 + b \Rightarrow b = 7600$. Итак, полные издержки производства и продажи после 128 первых единиц будут определяться функцией $C_{L1} = 12{,}5q + 7600$. Отсюда, приравняв функции выручки и издержек, $60q = 12{,}5q + 7600$,
и решив полученное уравнение, получим, что для получения прибыли нужно произвести и продать более 160 единиц товара.

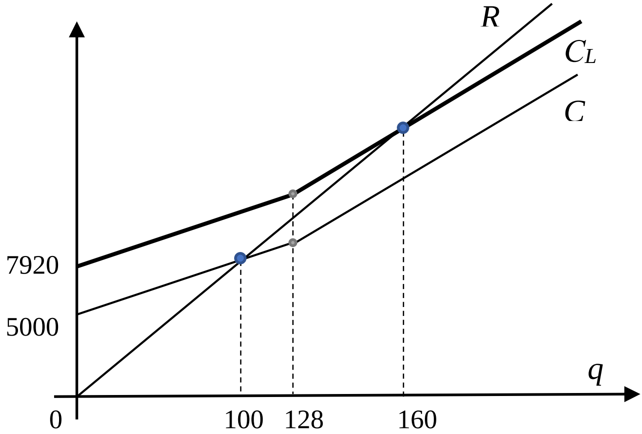


Рисунок 4.18

Упражнение 4.19

С. Как изменится решение задачи 4.18.С, если принять во внимание дополнительный паушальный налог $210?

Н. Как изменится решение задачи 4.18.Н, если принять во внимание дополнительный паушальный налог $340.

4.20. Задача

*Как изменится решение задачи **4.18**, если цена будет определяться функцией* $p = 80 - 0{,}2q$.

Приравняв функцию выручки и функцию издержек C, получим квадратное уравнение $(80 - 0{,}2q)q = 5000 + 10q \Rightarrow$
$-0{,}2q^2 + 70q - 5000 = 0$, имеющее корни $q_1 = 100$ и $q_2 = 250$. Так как $q_2 > 128$, оно не принадлежит области определения функции C. Поэтому, для того чтобы найти вторую границу зоны прибыли, необходимо выписать функцию, определяющую издержки при

$q > 128$. Так как $C(128) = 5000 + 10 \cdot 128 = 6280$, а наклон, определяемый средними переменными издержками равен $12{,}5$, то прямая $C_1 = 12{,}5q + b$ проходит через точку ($128; 6280$). Тогда, $6280 = 12{,}5 \cdot 128 + b \Rightarrow b = 4680$. Теперь приравняв функцию выручки и функцию издержек $(80 - 0{,}2q)q = 4680 + 12{,}5q$, получим квадратное уравнение $-0{,}2q^2 + 67{,}5q - 4680 = 0$. Его корни $97{,}5$ и 240, дают границы зоны прибыли

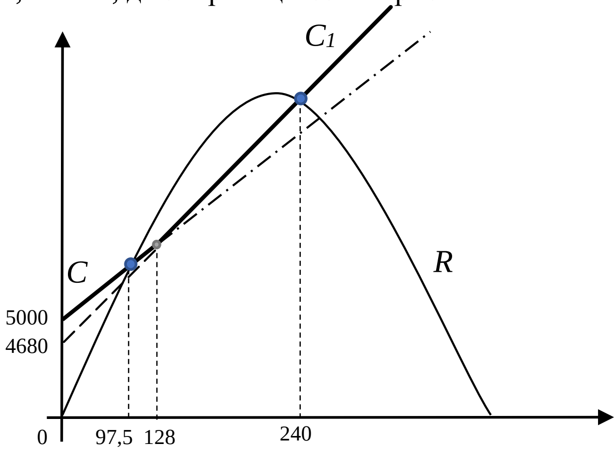


Рисунок 4.19

Упражнение 4.20

С. Затраты на производство и продажу нового вида товара равны \$150000. Начертите график и определите зону прибыли, зная, что средние переменные издержки для первых 3575 единиц равны \$1000, для последующих \$600, а цена (в \$) равна $p = 9000 - q$.

Н. Затраты на производство и продажу нового вида товара равны \$4000. Начертите график и определите зону прибыли, зная, что средние переменные издержки для первых 60 единиц равны \$30, для последующих \$23, а цена (в \$) равна $p = 160 - q$.

Итоговые упражнения

1. Определить зону прибыли, зная функцию издержек $C = 200 + 5q$ и цену: a) $p = 21$; b) $p = 35 - q$.

2. Определить зону прибыли, зная функцию издержек $C = 70 + 9q$ и цену: a) $p = 16$; b) $p = 28 - q$.

3. Издержки подготовки к выпуску нового вида товара 60 тысяч сомов. Определите зону прибыли, зная, что средние переменные издержки производства единицы товара 2 тысячи сом, а цена (в тыс. сом) определяется функцией: a) $p = 8$; b) $p = 10 – 0,2q$.

4. Издержки подготовки к выпуску нового вида товара 180 тысяч сомов. Определите зону прибыли, зная, что средние переменные издержки производства единицы товара 2,4 тысячи сом, а цена (в тыс. сом) определяется функцией: a) $p = 6,9$; b) $p = 21 – 0,3q$.

5. Определить зону прибыли, зная функцию издержек
$C = 540 + 20q + 0,1q^2$ и цену: a) $p = 37,5$; b) $p = 50 – 0,3q$.

6. Определить зону прибыли, зная функцию издержек
$C = 650 + 31q – 0,1q^2$ и цену: a) $p = 39$; b) $p = 54 – 0,3q$.

7. Станок стоимость $2400 списывается через 7 лет при остаточной стоимости $195. Определите балансовую стоимость станка через 5 лет 8 месяцев при равномерной амортизации.

8. Цена (в сомах) 21 ноября 2003 одного евро была равна 52,1039, одного доллара США 43,9222. Соответствующие цены 12 марта 2004 были 52,7734 и 43,2622. Сколько будет стоить одно евро, когда цена одного доллара будет равна 43,5151, если их цены связаны линейным образом?

9. Студент, затратив 9,5 часов на подготовку к квизу, получил 27 баллов, затратив 13 часов 21 минуту — 33 балла. Сколько времени нужно затратить, для того чтобы получить 45 баллов, если зависимость линейная?

10. При достижении объема продаж 1750 тыс. сом менеджер получает премию 21 тыс. сом; при 1920 тыс. сом – 24,4 тыс. сом. Какой будет премия при достижении объема продаж 1956000 сом, если зависимость линейная?

11. Издержки подготовки к выпуску нового вида товара $2100. Определите зону прибыли, зная, что средние переменные издержки производства единицы товара $50, а цена определяется функцией $p = 150 – q$.

11a. Как изменится ответ, если в условия задачи 11 вводится дополнительный паушальный налог $300?

11b. Как изменится ответ, если в условия задачи 11 вводится дополнительный акцизный налог $7,5?

12. Брайан планирует начать производство нового вида товара. По его предположениям постоянные издержки будут равны $12000, средние переменные издержки производства для первых 400 единиц товара $40, для последующих единиц $36, цена $88.
a) Помогите Брайану определить зону прибыли.
b) Через несколько дней выяснилось, что необходимо заплатить паушальный налог $7460. Как изменится ответ?
13. Решите задачу 12а, предполагая, что функция цены
$p = 105{,}2 – 0{,}084q$.
14. Определите зону прибыли, зная, что постоянные издержки будут равны $2520, средние переменные издержки производства товара $65, а цена $84.
15. Определите зону прибыли, зная, что постоянные издержки будут равны $9000, средние переменные издержки производства товара $260, а цена $p = 400 – 0{,}5q$.
15a. Как изменится ответ, если в условия задачи 15 дополнительно введен паушальный налог $600.
15b. Как изменится ответ, если в условия задачи 15 дополнительно введен акцизный налог $5?
16. Махабат планирует начать производство нового вида товара. По ее предположениям постоянные издержки будут равны $30060, средние переменные издержки производства для первых 900 единиц товара $60, для последующих единиц $64, цена $96.
a) Помогите Махабат определить зону прибыли.
b) Через несколько дней выяснилось, что необходимо заплатить паушальный налог $7460. Как изменится ответ?
17. Решите задачу 16а, предполагая, что функция цены
$p = 126{,}035 – 0{,}035575q$.
18. Определите зону прибыли, зная, что постоянные издержки будут равны $800, средние переменные издержки производства товара $40, а цена $p = 72 – 0{,}24q$. Как изменится ответ, если в условия задачи дополнительно введен налог на добавленную стоимость 20%, и известно, что в затратах на единицу товара НДС составляет $5,3.
19. Писатель может отдать право на публикацию своей новой книги одной из двух фирм. Фирма A предлагает $6 за каждую из первых 30 000 проданных книг и $8,5 за каждую последующую

проданную книгу. Фирма B не заплатит ничего за каждую из первых: a) 4000; b) 20000 проданных книг и \$9 за каждую последующую проданную книгу. Какое решение нужно принять?

20. Мээрим может устроиться продавать мороженое в одну из двух фирм. В фирме M она будет получать \$0,1 за каждую из 200 первых проданных порций и \$0,18 за каждую последующую проданную порцию. В фирме K она не получит ничего за каждую из первых 50 проданных порций и \$0,15 за каждую последующую проданную порцию. Какое решение нужно принять?

21. Затраты на производство и продажу нового вида товара равны \$4250. Начертите график и определите зону прибыли, зная, что средние переменные издержки равны \$6,7, а цена (в \$) равна $p = 26 - 0{,}02q$.

22. Затраты на производство и продажу нового вида товара равны \$1080. Начертите график и определите зону прибыли, зная, что средние переменные издержки первых 400 единиц равны \$5, для последующих единиц \$4,6, а цена равна \$6,2.

23. Затраты на производство и продажу нового вида товара равны \$27000. Начертите график и определите зону прибыли, зная, что средние переменные издержки равны \$45, а цена (в \$) равна $p = 150 - 0{,}1q$.

24. Затраты на производство и продажу нового вида товара равны \$4600. Начертите график и определите зону прибыли, зная, что средние переменные издержки первых 555 единиц \$22, для последующих единиц \$24, а цена равна \$33,5.

25. Затраты на производство и продажу нового вида товара равны \$2240. Начертите график и определите зону прибыли, зная, что средние переменные издержки первых 90 единиц \$7, для последующих единиц \$7,8, а цена (в \$) равна $p = 75 - 0{,}5q$.

§5. ОБЩЕЕ УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ ЛИНИИ

5.1. Уравнение прямой в параметрической форме

Снабдив точки координатами, мы получаем возможность описывать геометрические объекты с помощью уравнений, неравенств или их систем. Мы говорим, что уравнение (неравенство, система) является уравнением геометрического объекта, если координаты всех точек этого объекта и только они удовлетворяют уравнению.

Например, уравнение $(x-2)^2+(y+1)^2=0$, является уравнением точки ($2; -1$), так как сумма квадратов выражений равна нулю, тогда и только тогда, когда каждое выражение равно нулю. Уравнение $(x-2)^2+(y+1)^2=2^2$ описывает множество точек, расстояние от которых до точки ($2; -1$) равно 2 (см. формулу длины вектора, отрезка,). Это множество мы называем окружностью с центром в точке ($2; -1$) и радиусом 2.

Одним из основных постулатов евклидовой геометрии, является утверждение о том, что прямая линия определяется двумя точками. (Отметьте две точки, возьмите линейку и проведите прямую.) Отсюда следует, что для того чтобы написать уравнение прямой, достаточно использовать координаты двух точек этой прямой.

Итак, пусть $K(x_1;y_1)$ и $L(x_2;y_2)$ являются точками прямой m. Тогда вектор $\overline{KL}(x_2-x_1;y_2-y_1)$ определяет направление прямой m, и называется, *ни за что не догадаетесь,* <u>направляющим вектором</u> прямой m. Если (x, y) являются координатами произвольной точки X, лежащей на m, то вектор $\overline{KX}$ можно получить, умножив $\overline{KX}$ на какое–то число p:

$$(x-x_1;y-y_1)=p(x_2-x_1;y_2-y_1). \tag{5.1}$$

Переписав уравнение (1) в виде

$$\begin{cases} x=x_1+p(x_2-x_1); \\ y=y_1+p(y_2-y_1), \end{cases} \tag{5.2}$$

получим <u>уравнение прямой m в параметрической форме</u>.

Задача

Пусть прямая l задана точками $A(3, -2)$ и $B(5, 6)$. Определим координаты 5 точек, принадлежащих l.

Решение

Для этого запишем уравнение l в параметрической форме:

$$\begin{cases} x=3+p2; \\ y=-2+p8 \end{cases} \tag{5.3}$$

Написав систему (5.3), мы практически выполнили задание, так как каждое значение параметра p определяет координаты точки. Так, положив $p = -1$, получим точку прямой l с координатами $(1, -10)$, положив $p = 2$ — точку $(7, 14)$, и так далее. Отметим, что при $p = 0$ из системы (5.3) получим координаты точки A, а при $p = 1$ — точки B.

Упражнение 5.1

С. Пусть прямая m определена точками $C(2, -1)$ и $D(-3, 4)$. Требуется определить координаты 5 точек, лежащих на m.

Н. Пусть прямая n определена точками $E(-3, -2)$ и $F(5, 1)$. Требуется определить координаты 5 точек, лежащих на n.

5.2. Уравнение прямой, проходящей через 2 заданные точки

Выразив параметр p из уравнений системы (5.2), и приравняв полученные выражения, получим другую форму записи уравнения прямой m:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \tag{5.4}$$

Это уравнение часто называют уравнением прямой, проходящей через 2 заданные точки.

Замечание

Отметим, что в уравнении (5.4) имеет место равенство отношений. В таких ситуациях число нуль в знаменателе допустимо. Например, уравнение прямой, записанное в виде $\frac{x-3}{3} = \frac{y-2}{0}$ равносильно уравнению $3(y-2)=0(x-3) \Leftrightarrow y-2=0$.

Прямая $\boldsymbol{l}$ из примера 1 в форме (5.4): $\frac{x-3}{2} = \frac{y+2}{8}$.

Упражнение 5.2

С. Напишите уравнение прямой k, которая проходит через точки $(5, -11)$ и $(3, 0)$.

Н. Напишите уравнение прямой s, которая проходит через точки $(1, 7)$ и $(-2, 9)$.

5.3. Параллельные прямые

Равенство (5.4) сохранятся, если умножить знаменатели на одно и то же число. Это соответствует тому, что вместо вектора $\overline{KL}$ мы возьмем другой, параллельный ему вектор. Поэтому, имеет место уравнение:

$$\frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{m_2}. \qquad (5.5)$$

Здесь $(m_1;\ m_2)$ — координаты вектора параллельного прямой *m*. Он также является направляющим вектором.

Вектор (2; 8) является направляющим для всех прямых параллельных прямой $\frac{x - 3}{2} = \frac{y + 2}{8}$. *Поэтому прямую n, параллельную прямой* $\frac{x - 3}{2} = \frac{y + 2}{8}$ *и проходящую через точку C(1,7), задает уравнение:* $\frac{x - 1}{2} = \frac{y - 7}{8}$.

Упражнение 5.3

С. Напишите уравнение прямой, которая проходит через точку *(11, –2)* и параллельна прямой $\frac{x-3}{7} = \frac{y+12}{-33}$.

Н. Напишите уравнение прямой, которая проходит через точку *(–3, 15)* и параллельна прямой $\frac{x+6}{11} = \frac{y-2}{3}$.

5.4. Угловой коэффициент прямой

Перепишем уравнение (5.4) в виде:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \qquad (5.6)$$

Число $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ есть тангенс угла между осью *OX* и прямой, заданной уравнением (5.6). Его называют угловым коэффициентом прямой или наклоном (slope).

Обозначив его через k, запишем (5.6) в виде:

$$y - y_1 = k(x - x_1). \tag{5.7}$$

Уравнение (5.7) говорит, что прямая однозначно определяется угловым коэффициентом и точкой на ней.

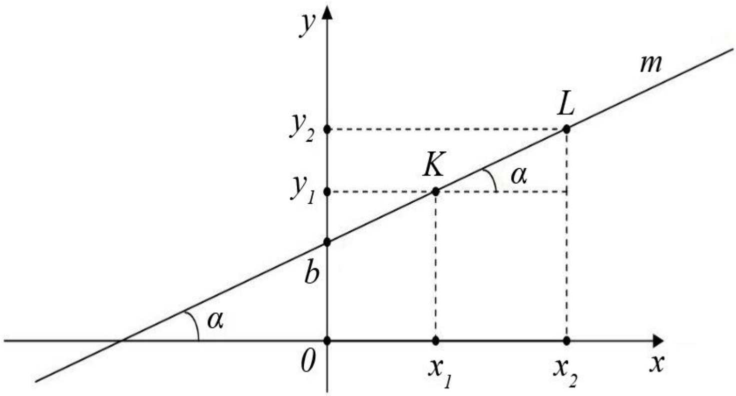


Рисунок 5.1

Понятно, что параллельные прямые имеют один и тот же угловой коэффициент.

Задача

1) *Написать уравнение прямой, которая проходит через точку (1, –21) и параллельна прямой* $y + 7 = -5(x - 2)$.

2) *Написать уравнение прямой, которая образует угол* 15^0 *с прямой s:* $y = x - 7$, *и проходит через точку (2,72, 3,14).*

Решение

1) Прямая $y + 7 = -5(x - 2)$ имеет наклон -5 и проходит через точку $(2, -7)$. Так как параллельные прямые имеют одинаковый наклон, ответ: $y + 21 = -5(x - 1)$.

2) Так как наклон прямой s равен 1, то есть является тангенсом угла 45^0, искомое уравнение имеет угловой коэффициент равный $tg(45^0 + 15^0) = tg60^0 = \sqrt{3}$. Поэтому, его можно записать в виде $y - 3{,}14 = \sqrt{3}(x - 2{,}72)$.

Важное замечание

В курсе аналитической геометрии обычно большое внимание уделяют формуле $tg\alpha = \dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}$, которая позволяет определить угол между прямыми $y = k_1 x + b_1$ и $y = k_2 x + b_2$. Во многих случаях для определения угла между прямыми достаточно воспользоваться геометрическим смыслом углового коэффициента: зная k_1 и k_2, через арктангенс можно найти соответствующие углы, а затем вычислить их разность.

Упражнение 5.4

С. Напишите уравнение прямой, которая проходит через точку *(–9, 27)* и параллельна прямой *y –17=12(x –0,5)*.

Н. Напишите уравнение прямой, проходящей через точку *(1,1, 2,1)* и параллельной прямой *y + 37 = 1,5(x + 32)*.

5.5. Линейная функция

Запишем уравнение (5.7) в виде функции:

$$y = kx + b. \tag{5.8}$$

Число b является координатой точки пересечения прямой m с осью ОУ.

В случае, когда между x и y имеет место зависимость вида (5.8), говорят, что имеет место линейная зависимость. Функция (5.8) называется линейной. Из вышесказанного следует, что графиком линейной функции является прямая линия.

Примечание

Уравнение (5.8) описывает все прямые на плоскости, за исключением вертикальных. В этих случаях все точки прямой имеют одинаковую координату x, и поэтому, соответствующее уравнение имеет вид $x = a$.

Задача

1) *Температура воздуха в 2 часа была 12^0, в 6 часов 7^0. Определить температуру в 2 часа 30 минут, предполагая линейную зависимость.*

2) *Пусть известно, что компания “Груша” произвела в 2008 году 240 компьютеров, а в 2014 году – 1200 и то, что выпуск*

возрастал равномерно. Сколько компьютеров было произведено в 2010, 2013 годах?

Решение

1) Функция $T = at+b$ связывает температуру воздуха T и время t, так как имеет место линейная зависимость. Подставим имеющиеся данные: $\begin{cases} 12 = a2 + b; \\ 7 = a6 + b, \end{cases}$ вычтем из 1–го уравнения системы 2–ое, и получим $5 = -4a$. Тогда, $a = -1{,}25$, и воспользовавшись этим, из одного из уравнений системы получим $b = 14{,}5$. Итак, в рамках наших предположений, температура и время связаны функцией $T = -1{,}25t + 14{,}5$.

Следовательно, в 2 часа 30 минут температура воздуха была $T(2{,}5) = -1{,}25 \cdot 2{,}5 + 14{,}5 = 11{,}375^0$.

2) Условие равномерности роста выпуска, означает, что объем выпуска есть линейная функция от года выпуска: $Y = kn + b$. Подставим имеющиеся данные: $\begin{cases} 240 = k2008 + b; \\ 1200 = k2014 + b, \end{cases}$ вычтем из 2–го уравнения системы 1–ое, и получим $960 = 6k$. Тогда, $k = 160$, и из одного из уравнений системы: $b = -321040$. Итак, уравнение связывающее год с объёмом выпуска:
$Y = 160k - 321040$. Теперь, для того чтобы ответить на вопросы поставленные в условии задачи, достаточно вместо n подставить необходимые значения. Итак,

в 2010 году: $Y = 160 \cdot 2010 - 321040 = 560;$

в 2013 году: $Y = 160 \cdot 2013 - 321040 = 1040.$

Полученное уравнение также позволяет оценить объём выпуска продукции в будущем, при условии, что темпы роста сохранятся. Например, в 2029 году ожидается выпуск
$Y = 160 \cdot 2029 - 321040 = 3600$ компьютеров.

<u>Замечание</u>

Стоит критически отнестись к числу 3600, так как оно получено в предположении, что темпы роста не изменятся в течение длительного срока, что на практике маловероятно.

Упражнение 5.5

С. Прибыль фирмы Кадыра при выручке \$75,000 была равна \$12,000, при выручке \$125,000 равна \$32,000. Предположив линейную зависимость, определите прибыль при выручке \$90,000.

Н. После продажи 15 футболок у Саида было 6900 сомов. После того как он продал еще 25 футболок у него было 3400 сомов. Сколько денег было у Саида в начальный момент, если цена футболки 140 сомов?

5.6. Общее уравнение прямой на плоскости

Так как прямая линия, вопреки, а правильнее, благодаря своей простоте, является важнейшим инструментом научных исследований, выпишем еще несколько вариантов записи уравнения прямой.

Пусть (*A; B*) координаты вектора перпендикулярного прямой *m*, а $(x_1,\ y_1)$ — координаты точки *K* лежащей на *m*. Тогда произвольная точка прямой *m* с координатами (*x, y*) образует с *K* вектор $(x-x_1;\ y-y_1)$ перпендикулярный (*A; B*). Поэтому равно нулю скалярное произведение: $A(x-x_1)+B(y-y_1)=0$. Перегруппировав слагаемые, получим уравнение

$$Ax + By = C. \tag{5.9}$$

Его название: общее уравнение прямой на плоскости.

Задача

Написать уравнение высоты треугольника, опущенной на сторону, лежащую на прямой –3x + 7y =11. Остальные стороны лежат на прямых 5x – 7y = 1 и 3x + 4y = 23.

Решение

Высота опускается из вершины треугольника, образованной пересечением прямых $5x-7y=1$ и $3x+4y=23$. Поэтому, координаты этой вершины есть решение системы уравнений: $\begin{cases} 5x-7y=1; \\ 3x+4y=23; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=5; \\ y=2. \end{cases}$ Коэффициенты третьего уравнения (*–3; 7*) являются координатами направляющего вектора искомой прямой. Поэтому, согласно (5.5), требуемое уравнение $\dfrac{x-5}{-3}=\dfrac{y-2}{7}$.

Так как уравнение прямой чаще всего записывается в форме линейной функции, определим наклон прямой перпендикулярной к заданной: запишем уравнение прямой $y = kx + b$ в виде (5.9), то есть $kx - y + b = 0$.
Тогда, в силу сказанного выше, $(k;\ -1)$ координаты вектора перпендикулярного этой прямой.

Если уравнение прямой, которая перпендикулярна исходной, $y = k_1 x + b_1$ также представить в виде $k_1 x - y + b_1 = 0$, то скалярное произведение вектора его коэффициентов $(k_1; -1)$ с вектором коэффициентов исходного уравнения равно 0:
$k \cdot k_1 + (-1)(-1) = 0$. Отсюда следует, что угловой коэффициент прямой, перпендикулярной линии $y = kx + b$ равен $\frac{-1}{k}$, то есть является обратным по значению и противоположным по знаку.

Вернемся к задаче. Так, так как уравнение $-3x+7y=11$ можно переписать в виде $y = (3/7)\, x + 11/7$, угловой коэффициент (наклон) высоты равен $(-7/3)$. Поэтому, так как высота опущена из точки с координатами (5; 2), уравнение высоты: $y - 2 = (-7/3)(x - 5)$. Нетрудно видеть, что получился тот же ответ, что и выше.

Упражнение 5.6

С. Написать уравнение высоты треугольника, опущенной на сторону, лежащую на прямой $5x - 7y = 1$. Остальные стороны лежат на прямых $-3x + 7y = 11$ и $3x + 4y = 23$.

Н. Написать уравнение высоты треугольника, опущенной на сторону, лежащую на прямой $3x + 4y = 23$. Остальные стороны лежат на прямых $-3x + 7y = 11$ и $5x - 7y = 1$.

5.7. Задача

На покупку труда и капитала истрачено $420. Сколько единиц труда и капитала имеется в наличии, если единица труда стоит $5, единица капитала стоит $7?

Решение

В данном случае единица труда это 1 час работы рабочего, стоимость единицы капитала — стоимость аренды станка на 1 час. Тогда имеет место уравнение $5x + 7y = 420$. Соответствующую прямую в экономической теории называют изокостой — линией постоянных затрат. Разделив уравнение на 420 – правую часть получим: $\dfrac{x}{84}+\dfrac{y}{60}=1$. Эта форма записи очень удобна для чертежа — описываемая прямая соединяет точку 84 на оси OX и точку 60 на $OУ$. Уравнение прямой записанное в виде $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$,

называется <u>уравнением прямой в отрезках</u>. Эта запись означает, что прямая проходит через точки (a, 0) и (0, b).

Упражнение 5.7

С. Цена тетради 4 сома, ручки — 10 сомов. Напишите уравнение изокосты, предполагая, что было истрачено 200 сомов. Как изменится изокоста, если цена тетради станет 5 сомов? Нарисуйте обе изокосты в одной и той же системе координат.

Н. Цена кекса 25 сомов, чашки чая — 10 сомов. Напишите уравнение изокосты, предполагая, что было истрачено 250 сомов. Как изменится изокоста, если предположить, что было истрачено 300 сомов? Нарисуйте обе изокосты в одной и той же системе координат.

5.8. Прямая в многомерном пространстве

Отметим, что многие соображения, которые были использованы для описания прямой на плоскости годятся и для пространств большего числа измерений.

Итак, пусть $A(a_1; a_2; ...; a_n)$ и $B(b_1; b_2; ...; b_n)$ являются точками прямой l. Тогда, имеем вектор, лежащий на прямой l: $\overline{AB}(b_1-a_1; b_2-a_2; ...; b_n-a_n)$. Если $X(x_1; x_2; ...; x_n)$ точка, на l, вектор $\overline{AX}$ можно получить, умножив координаты $\overline{AB}$ на какое-то число p: $(x_1-a_1; x_2-a_2; ...; x_n-a_n)=p(b_1-a_1; b_2-a_2; ...; b_n-a_n)$.

Переписав уравнение в виде

$$\begin{cases} x_1 = a_1 + p(b_1 - a_1); \\ x_2 = a_2 + p(b_2 - a_2); \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = a_n + p(b_n - a_n) \end{cases} \qquad (5.10)$$

получим <u>уравнение прямой *l* в параметрической форме</u>.

Задача

Прямая l определена точками A(5, 3, –2) и B(5, –6, 3). Требуется определить координаты 5 точек прямой l.

Решение

Запишем уравнение *l* в параметрической форме:

$$\begin{cases} x = 5 + p \cdot 0; \\ y = 3 + p(-9); \\ z = -2 + p \cdot 5. \end{cases}$$

В итоге, решение, практически, закончено, потому что каждое значение *p* определяет координаты точки. Так, если $p = -1$, получается точка (5, 12, –7); при $p = 2$, получаем точку (5, –15, –12) и так далее. Стоит отметить, что при $p = 0$, получаются координаты точки *A*, а при $p = 1$, получаются координаты точки *B*.

Упражнение 5.8

С. Определите координаты 4 точек, которые лежат на прямой, проходящей через точки (–5, –1, 21) и (3, 0, –5).

Н. Определите координаты 4 точек, которые лежат на прямой, проходящей через точки (12, 51, –1) и (33, –10, 43).

5.9. Уравнение прямой, проходящей через две точки

Выразив параметр *p* из уравнений системы (5.10), получим другую форму записи уравнения прямой *l*:

$$\frac{x_1 - a_1}{b_1 - a_1} = \frac{x_2 - a_2}{b_2 - a_2} \dots = \frac{x_n - a_n}{b_n - a_n} \qquad (5.11)$$

Задача *Написать уравнение прямой* ***k,*** *проходящей через точки (–7, 2, –4, 8) и (–4, 3, 4, 1).*

Решение

Координаты направляющего вектора:

$(-4-(-7);\ 3-2;\ 4-(-4);\ 1-8) = (3;\ 1;\ 8;\ -7)$. Тогда, согласно формуле (11), уравнение прямой $\boldsymbol{k}$:

$$\frac{x_1-(-7)}{3}=\frac{x_2-2}{1}=\frac{x_3-(-4)}{8}=\frac{x_4-8}{-7}\ .$$

Упражнение 5.9

С. Написать уравнение прямой**,** проходящей через точки *(7, 12, 4)* и *(4, –3, –1).*

Н. Написать уравнение прямой**,** проходящей через точки *(17, –2, 3, 18)* и *(–1, –7, 4, 11).*

5.10. Прямая параллельная данной

В (5.11) равенства сохранятся, если умножить все знаменатели на одно и то же число. Это соответствует тому, что вместо вектора $\overline{AB}(b_1-a_1;\ b_2-a_2;\ ...;\ b_n-a_n)$ возьмем другой, параллельный ему вектор. Поэтому, имеет место уравнение $\frac{x_1-a_1}{m_1}=\frac{x_2-a_2}{m_2}\ ...=\frac{x_n-a_n}{m_n}$. Здесь $(m_1;\ m_2;\ ...;\ m_n)$ — координаты вектора параллельного прямой *l*. Его называют направляющим вектором.

Задача

Написать уравнение прямой ***m****, проходящей через точки (2, –4, 8) и (4, 4, 1), а также уравнение прямой, параллельной* ***m****, проходящей через точку С(1, 7, –2,5).*

Решение

Координаты направляющего вектора:
$(4-2;\ 4-(-4);\ 1-8) = (2;\ 8;\ -7)$. Тогда, уравнение прямой $\boldsymbol{m}$:
$\frac{x-2}{2}=\frac{y-(-4)}{8}=\frac{z-8}{-7}$, а уравнение $\frac{x-1}{2}=\frac{y-7}{8}=\frac{z+2,5}{-7}$ задает параллельную ей прямую.

Упражнение 5.10

С. Написать уравнение прямой, которая параллельна прямой из упражнения 5.9.С и проходит через точку *С(21, –7, 1,5).*

Н. Написать уравнение прямой, которая параллельна прямой из упражнения 5.9.Н и проходит через точку *С(12, 1,7, –5, 6).*

Итоговые упражнения

1. Даны точки $A(5, -7), B(-3, 1), C(2, 3)$. Найти:
1) уравнение прямой AB;
2) уравнение прямой CD, которая параллельна AB;
3) уравнение прямой CH, которая перпендикулярна AB;
4) координаты 5 произвольных точек на прямой AB;
5) наклон прямой линии CK, где точка K делит отрезок AB в отношении 3: 1.
6) длину AL — медианы треугольника ABC;
7) уравнение прямой AM, образующей угол 45^0 с прямой AB.

2. Точки $A(-3, 4)$, $B(5, 1)$, $C(4, -3)$ – являются вершинами параллелограмма ABCD. Найти:
1) уравнение прямой AB;
2) уравнение прямой CD;
3) координаты точки D;
4) уравнение AN — медианы треугольника ABC;
5) уравнение AK — высоты треугольника ABC;
6) площадь параллелограмма ABCD;
7) площадь треугольника ABM, где точка M является точкой пересечения медиан треугольника ABC.

3. Напишите уравнение прямой, которая: a) параллельна;
b) перпендикулярна прямой $-3x + 7y = 11$,
и проходит через точку $(2; 4)$.

4. Напишите уравнение прямой, которая проходит через точки:
1) (–1, 2) и (5, 2); 2) (–2, –3, 1) и (4, 5, 6);
3) (1, –1, 2, 0) и (–7, 2, –9, 1).

5. Какая разница между прямыми l_1 и l_2, если

$$l_1 : \frac{x-2}{4} = \frac{y+4}{-2} = \frac{z-7}{-8}; \qquad l_2 : \frac{x-2}{-2} = \frac{y+4}{1} = \frac{z-7}{4}.$$

6. Напишите уравнение прямой, которая параллельна прямой $\frac{x-1}{-2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-5}{6}$ и проходит через точку $(7, -2, 15)$.

7. Официальный курс российского рубля к доллару США 5 января 1995 года был 3623:1, 6 февраля 1995 года — 4133:1. Каким примерно был курс рубля 17 января, если предположить, что он изменялся равномерно?

§6. ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ. РАЗРЕШИМОСТЬ

6.1. Графическая интерпретация: единственное решение

Как отмечалось в §5, уравнение вида $Ax+By=C$ является уравнением прямой линии. Соответственно, два уравнения такого рода описывают две прямые, а решение системы из двух уравнений определяет координаты точки пересечения прямых. В данном параграфе мы будем активно использовать теорему Крамера для систем второго порядка. Для удобства напомним ее.

Итак, если Δ- определитель системы двух линейных уравнений двух переменных общего вида:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1; \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2, \end{cases} \tag{6.1}$$

отличен от нуля, его решение можно найти по формулам

$x_1 = \Delta_1 / \Delta; \quad x_2 = \Delta_2 / \Delta$.

Задача

Решить систему и нарисовать графики соответствующих уравнений: $\begin{cases} 12x - 7y = 84; \\ 2x + 3y = -11. \end{cases}$

Решение

Решение задачи начнем с вычисление соответствующих определителей: $\Delta = \begin{vmatrix} 12 & -7 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 12 \cdot 3 - 2(-7) = 50;$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 84 & -7 \\ -11 & 3 \end{vmatrix} = 175; \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 12 & 84 \\ 2 & -11 \end{vmatrix} = -300.$$

Поэтому, решение системы: $x = 175/50 = 3,5; \ y = -300/50 = -6$.

Для того чтобы нарисовать графики этих уравнений перепишем их в виде уравнений в отрезках:

$$\begin{cases} 12x - 7y = 84; \\ 2x + 3y = -11; \end{cases} <=> \begin{cases} x/7 + y/(-12) = 1; \\ x/(-5,5) + y/(-11/3) = 1. \end{cases}$$

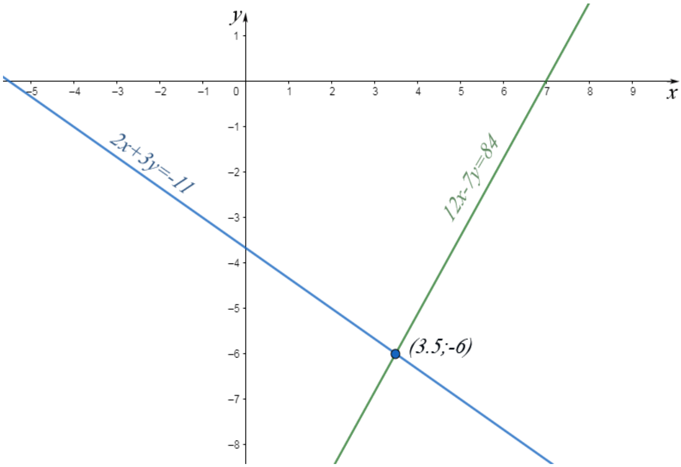


Рисунок 6.1

Нетрудно увидеть, что координаты точки пересечения прямых являются решением системы.

Упражнение 6.1. Решить систему и нарисовать графики соответствующих уравнений:

С. $\begin{cases} 11x + 8y = 88; \\ 5x + 4y = 42. \end{cases}$ **Н**. $\begin{cases} 4x - y = 0{,}2; \\ 13x + 5y = 65. \end{cases}$

6.2. Графическая интерпретация: нет решений

При обсуждении свойств уравнения прямой в §5, было отмечено, что коэффициенты A и B уравнения $Ax + By = C$ могут рассматриваться как координаты вектора, перпендикулярного прямой, описываемой этим уравнением. Отсюда получается, что, если коэффициенты уравнений системы пропорциональны, соответствующие перпендикулярные вектора будут параллельны. Следовательно, уравнения такой системы описывают параллельные прямые, то есть прямые не имеющие точек пересечения. Давайте увидим, как это выражается на языке линейных систем

Задача

Решить систему и нарисовать графики соответствующих уравнений:

$$\begin{cases} 12x - 7y = 42; \\ -24x + 14y = -168. \end{cases}$$

Решение

Решение задачи начнем с вычисления определителя матрицы коэффициентов системы: $\Delta = \begin{vmatrix} 12 & -7 \\ -24 & 14 \end{vmatrix} = 12 \cdot 14 - (-24)(-7) = 0$ и определителя Δ_x :

$\Delta_x = \begin{vmatrix} 42 & -7 \\ -168 & 14 \end{vmatrix} = -588$ **.** Тогда, согласно теореме Крамера имеет место уравнение $0x = -588$, которое не имеет решения.

Для того чтобы нарисовать графики этих уравнений, полезно переписать их в виде уравнений в отрезках:

$$\begin{cases} 12x - 7y = 42; \\ -24x + 14y = -168; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x / 3,5 + y / (-6) = 1; \\ x / 7 + y / (-12) = 1. \end{cases}$$

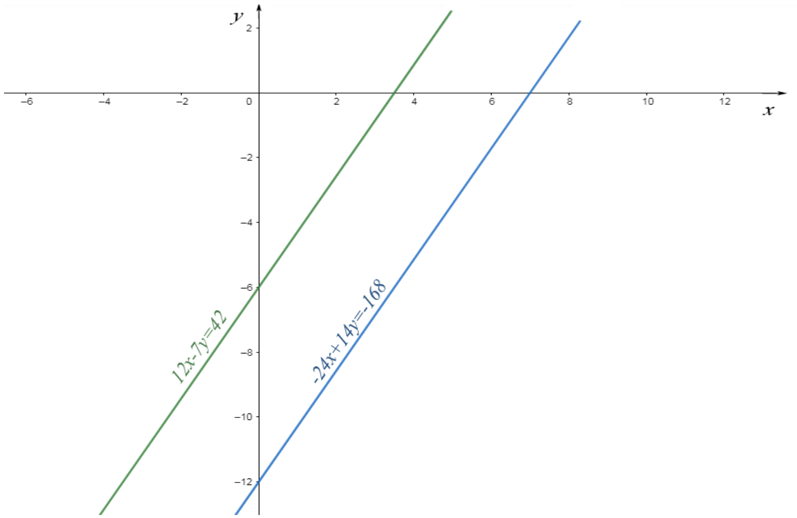


Рисунок 6.2

Итак, получились параллельные прямые. Соответственно, выяснилось, что уравнения непересекающихся прямых образуют систему, не имеющую решение.

Упражнение 6.2. Решить систему и нарисовать графики соответствующих уравнений:

С. $\begin{cases} 10x + 8y = 88; \\ 5x + 4y = 40. \end{cases}$ **Н**. $\begin{cases} 4x - y = 2; \\ -12x + 3y = -36. \end{cases}$

6.3. Графическая интерпретация: множество решений

Две прямые имеют бесконечно много точек пересечения только в том случае, когда эти прямые совпадают. На языке систем линейных уравнений это означает, что коэффициенты одного из уравнений получаются из коэффициентов другого умножением на одно и то же число.

Задача

Решить систему и нарисовать графики соответствующих уравнений: $\begin{cases} 12x - 16y = 48; \\ -3x + 4y = -12. \end{cases}$

Решение

Вычислим определители

$$\Delta = \begin{vmatrix} 12 & -16 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 12 \cdot 4 - (-3)(-16) = 0; \qquad \Delta_x = \begin{vmatrix} 48 & -16 \\ -12 & 4 \end{vmatrix} = 0 .$$

Тогда, по теореме Крамера, $0x = 0$. Поэтому, исходная система равносильна системе: $\begin{cases} 0x = 0; \\ -3x + 4y = -12. \end{cases}$ Эта система имеет бесконечно много решений $(p;\ 0{,}75p - 3)$, где p может быть любым числом.

Для того чтобы нарисовать графики этих уравнений, запишем их в виде уравнений в отрезках:

$$\begin{cases} 12x - 16y = 48; \\ -3x + 4y = -12; \end{cases} <=> \begin{cases} x / 4 + y / (-3) = 1; \\ x / 4 + y / (-3) = 1. \end{cases}$$

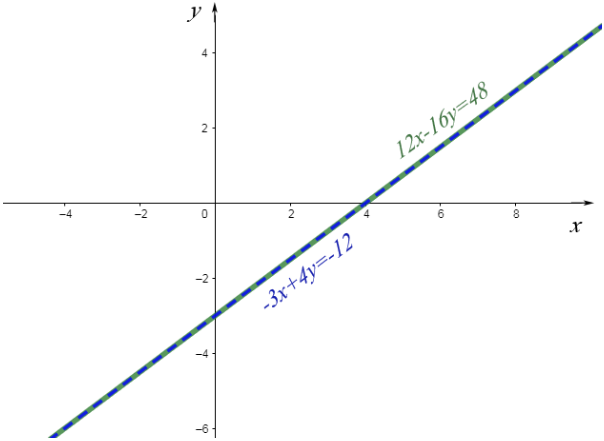


Рисунок 6.3

Упражнение 6.3. Решить систему и нарисовать графики соответствующих уравнений:

С. $\begin{cases} 15x + 6y = 90; \\ 5x + 2y = 30. \end{cases}$ **Н**. $\begin{cases} 4x - 7y = 28; \\ -12x + 21y = -84. \end{cases}$

Следствие

Подведем итоги. Система $\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1; \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$

– имеет единственное решение, если $\Delta \neq 0$. Эта ситуация иллюстрируется двумя прямыми, пересекающимися в точке с координатами, которые совпадают с решением системы;

– не имеет решений, если $\Delta = 0$ и $\Delta_x \neq 0$. Эта ситуация иллюстрируется двумя параллельными прямыми;

– имеет бесконечно много решений, если $\Delta = 0$ и $\Delta_x = 0$. Эта ситуация иллюстрируется двумя совпадающими прямыми.

6.4. Задача

Проиллюстрируем сказанное следующим примером.

Задача

а) Швея может сшить сарафан за 25 минут и платье за 1 час. Ученица швеи через неделю после начала обучения могла сшить сарафан за 1 час 30 минут и платье за 2 часа. Они сшили одинаковые количества сарафанов и платьев. Швея проработала 4 часа 30 минут, а ученица — 13 часов. Сколько сарафанов и платьев сшила каждая?

b) Еще через неделю, произведя замеры времени, Адыл сообщил, что ученица швеи может сшить сарафан за 45 минут и платье за 1 часа 48 минут. Также Адыл сказал, что они сшили одинаковые количества сарафанов и платьев, когда швея проработала 4,2 часа, а ученица — 11 часов 15 минут. Сколько сарафанов и платьев сшила каждая?

c) После того как выяснилось, что последняя задача решения не имеет, начали искать ошибку и выяснили, что швея затратила не 4,2 часа, а 4 часа 20 минут. Решите эту задачу.

Проиллюстрируйте каждую ситуацию, нарисовав графики соответствующих уравнений.

Решение

Обозначим через x количество сарафанов, через y — платьев. Для того чтобы не возится с дробными числами, переведем все данные в минуты, напишем и решим соответствующие системы.

a) $\begin{cases} 25x + 60y = 270; \\ 90x + 120y = 780. \end{cases}$ Как обычно, вычислим определитель матрицы коэффициентов системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 25 & 60 \\ 90 & 120 \end{vmatrix} = 25 \cdot 120 - 90 \cdot 60 = -2400; \ \Delta_x = \begin{vmatrix} 270 & 60 \\ 780 & 120 \end{vmatrix} = -14400.$$

Тогда $x = -14400/(-2400) = 6$ и, отсюда, $y = 2$.

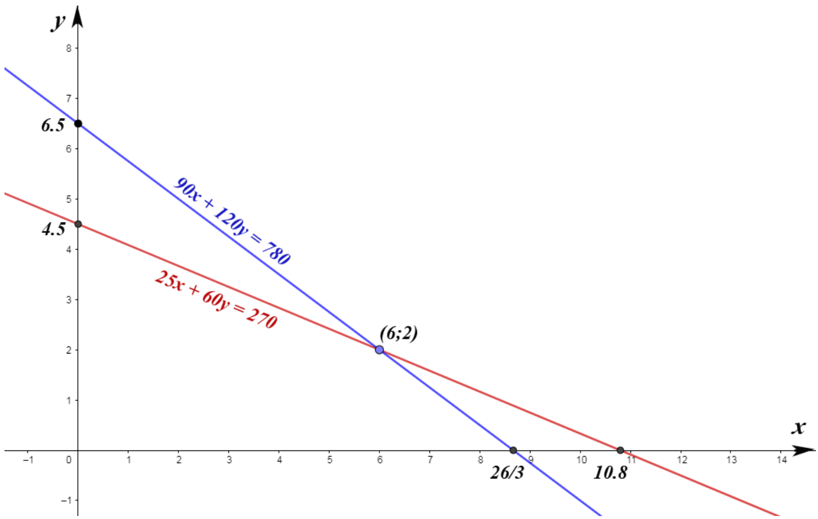


Рисунок 6.4

Для того чтобы нарисовать графики этих уравнений, полезно записать их в виде уравнений в отрезках:

$$\begin{cases} 25x + 60y = 270; \\ 90x + 120y = 78; \end{cases} <=> \begin{cases} \dfrac{x}{10{,}8} + \dfrac{y}{4{,}5} = 1; \\ \dfrac{x}{26\,/\,3} + \dfrac{y}{6{,}5} = 1. \end{cases}$$

b) $\begin{cases} 25x + 60y = 252; \\ 45x + 108y = 675. \end{cases}$

Вычислим определитель матрицы коэффициентов системы: $\Delta = \begin{vmatrix} 25 & 60 \\ 45 & 108 \end{vmatrix} = 0$ и определитель $\Delta_x = \begin{vmatrix} 252 & 60 \\ 675 & 108 \end{vmatrix} = -13284.$

Следовательно, по теореме Крамера, система не имеет решения. Видимо, в условиях задачи имеется ошибка.

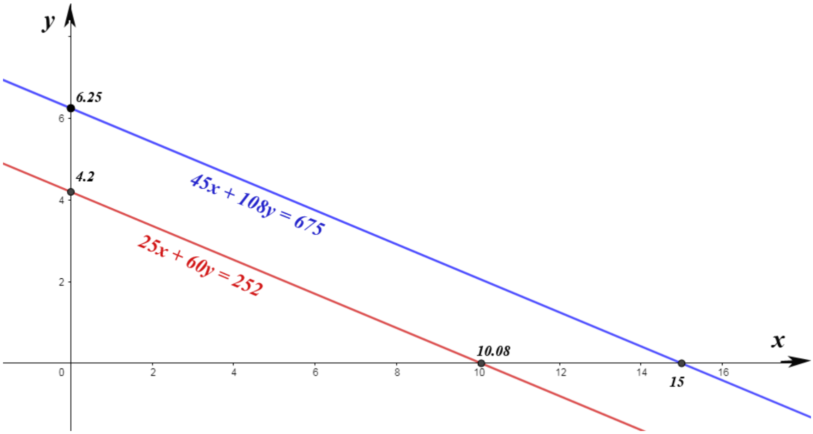


Рисунок 6.5

c) $\begin{cases} 25x + 60y = 375; \\ 45x + 108y = 675. \end{cases}$ Мы знаем, что определитель матрицы коэффициентов системы равен нулю. В то же время,

$\Delta_x = 375 \cdot 108 - 675 \cdot 60 = 40500 - 40500 = 0.$

Эта ситуация имеет место, когда прямые определяемые уравнениями системы совпадают.

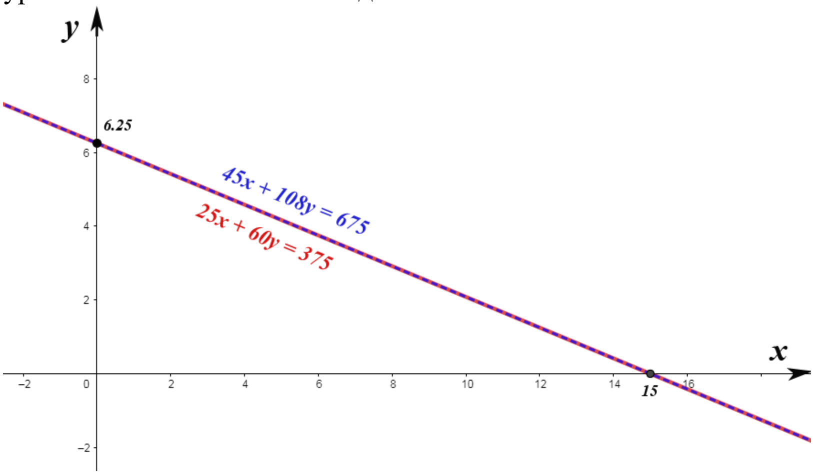


Рисунок 6.6

Следовательно, исходная система равносильна системе:

$$\begin{cases} x = p; \\ 45x + 108y = 675; \end{cases} <=> \begin{cases} x = p; \\ y = (675 - 45p) / 108; \end{cases} <=> \begin{cases} x = p; \\ y = (75 - 5p) / 12. \end{cases}$$

Согласно условиям задачи, переменные x и y должны быть целыми и неотрицательными. Так как $x = p \geq 0$ и $y = (75 - 5p) / 12 \geq 0,$ получаем $0 \leq p \leq 15$. Далее, получаем, что для $p = 0,\ 1,\ \ldots,\ 11$, переменная $y = (75 - 5p)/12$ будет целочисленной только при $p = 3$ или $p = 15$. Итак, получаем, что возможны только два решения: $x = 3;\ y = 5$ или $x = 15;\ y = 0$.

Упражнение 6.4. Определите число решений системы и нарисуйте графики уравнений:

С. 1) $\begin{cases} 5x - 20y = -21; \\ 62x - 248y = -260{,}4. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 6x - 24y = -25{,}2; \\ -31x + 124y = 132{,}2. \end{cases}$

3) $\begin{cases} -9x + 36y = 37{,}8; \\ 93x - 225y = -388{,}5. \end{cases}$

Н. 1) $\begin{cases} 24x + 75y = 195; \\ 16x + 50y = 130. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 12x + 37{,}5y = 99{,}5; \\ 4{,}8x + 15y = 39. \end{cases}$

3) $\begin{cases} 8x + 25y = 65; \\ 9{,}6x + 30y = 78. \end{cases}$

6.5. Линейные уравнения

Далее, в этом параграфе, рассмотрим некоторые общие положения, связанные с линейными уравнениями.

Задача

Цена сорочки 250 сомов. Средние переменные расходы на производство одной сорочки (стоимость ткани, фурнитура, оплата труда и т.п.) 170 сомов. Сколько сорочек нужно произвести и продать, для того чтобы возместить расходы, если постоянные издержки (расходы на аренду помещений, оборудования, получение разрешительных документов и т.п.) составляют 100 000 сомов?

Обозначив количество сорочек через q, получим что выручка от продажи сорочек R будет равна $250q$, а общие расходы $C = 170q + 100\ 000$. Расходы будут возмещены, когда выручка сравняется с расходами: $R = C$. В результате имеем уравнение: $250q = 170q + 100\ 000$. Его решение, $q = 12500$.

Отметим, что в русскоязычной литературе это число обычно называют точкой безубыточности. На наш взгляд, более уместно название точка перелома, что соответствует исходному английскому термину break–even point.

Уравнение $250q = 170q + 100\ 000$, которое мы составили и решили, называется линейным.

В процессе решения, мы пользовались элементарными преобразованиями уравнения.

Определение

Два уравнения называются равносильными (эквивалентными), если корни первого уравнения, и только они, являются корнями второго. Два уравнения будут равносильны, если одно из них можно привести к другому, используя только элементарные преобразования, т.е.:

– умножая (деля) уравнение на число отличное от нуля;

– прибавляя (вычитая) к обеим частям уравнения одно и то же выражение.

Определение

Уравнение называется линейным алгебраическим уравнением с n неизвестными, если его с помощью элементарных преобразований можно привести к виду

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b. \qquad (6.2)$$

Числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ называются коэффициентами уравнения, число b — правая часть или свободный член уравнения

Левая часть уравнения (6.2) называется линейной функцией от n переменных.

При решении линейных уравнений мы можем столкнуться с тремя, принципиально различными ситуациями.

Уравнение может:

А. не иметь решений, если его с помощью элементарных преобразований можно привести к уравнению $0x = b$ ($b \neq 0$). Подставляя вместо x любое число, слева получаем нуль, в то время как, справа не нуль.

В. иметь одно и только одно решение, если его можно привести к виду $ax = b$ ($a \neq 0$). Тогда $x = b/a$.

С. иметь бесконечно много решений, если его можно привести к виду $0x = 0$ (тогда при любом значении x имеет место равенство $0 = 0$), или к виду $ax_k + ... + cx_m = b$ ($k \neq m$, $a \neq 0$, $c \neq 0$). В этом случае, все неизвестные, кроме x_k можно выбирать произвольным образом и выражать x_k через них.

Задача *Решите уравнения:*

1) $15(2x - 1) = 8(3x + 4) - 3(9 - 2x)$;
2) $5(14x + 21) - 33 = 7(4x - 11) + 3x + 71$;
3) $52(3x - 21) - 2(7x + 4) = 17(5x+2)+19(3x - 60) + 6$;
4) $5x_1 - 7x_2 = 34$.

Решение

1) Откроем скобки и приведем подобные члены:
$15(2x - 1) = 8(3x + 4) - 3(9 - 2x) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 30x - 15 = 24x + 32 - 27 + 6x \Leftrightarrow 30x - 15 = 30x + 5 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 0x = 20$. Выяснилось, что уравнение корней не имееет.

2) Откроем скобки и приведем подобные члены:
$5(14x + 21) - 33 = 7(4x - 11) + 3x + 71 \Leftrightarrow 70x + 72 = 31x - 6 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 39x = -78 \Leftrightarrow x = -2$.

3) Откроем скобки и приведем подобные члены:
$52(3x - 21) - 2(7x + 4) = 17(5x + 2) + 19(3x - 60) + 6 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 156x - 1092 - 14x - 8 = 85x + 34 + 57x - 1140 + 6 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 142x - 1100 = 142x - 1100 \Leftrightarrow 0x = 0$. Выяснилось, что уравнение имеет бесконечно много решений — корнем уравнения является любое число.

4) Решение $x_1 = 4;\ x_2 = -2$, или то же самое ($4; -2$), уравнения $5x_1 - 7x_2 = 34$ можно получить, взяв $x_2 = -2$ и решив соответствующее уравнение $5x_1 + 14 = 34$.

Если же мы положим $x_2 = 1$, то получим решение ($8{,}2; 1$). Понятно, что x_2 можно придавать бесконечно много значений и, соответственно, получать бесконечно много решений уравнения. Для того чтобы записать все эти решения, положим $x_2 = a$, где a — некоторое число. Математики говорят, что a является параметром. Тогда, $5x_1 - 7a = 34 \Leftrightarrow 5x_1 = 34 + 7a \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x_1 = (34+7a)/5$. В результате, все решения уравнения

$5x_1 - 7x_2 = 34$ можно записать в параметрической форме: $((34+7a)/5;\ a)$, где $a \in R$.

Упражнение 6.5. Решите уравнения:

С. 1) $11(4x – 3) – 17x = 84 + 3(9x – 22)$;

2) $6x + 17 = 5(4x – 11) – (4 – x) + 7$;

3) $2(13x – 1) – 8(7 – 4x) = 19 – 7(5x + 2) + 3(31x – 6) – 45$;

4) $8x – 3y + 7z = 3x + 32$.

Н. 1) $9(5 – 2x) = 13 – 3(6x + 19)$; 2) $7x + 72 = 5x$;

3) $21(3x – 4) – 2(5x + 4) = 53(x + 2) – 14$; 4) $4x + 11y = 23$.

6.6. Задача

Исследовать уравнения на разрешимость относительно x и в тех случаях, когда решения существуют, найти их:

1) $4 – 2x = 21a$; 2) $11x + 37 = cx + 8$;

3) $7(3x + 2) – d(6 – 4x)= 2e + 15$.

Решение

1) Уравнение $4 – 2x = 21a$ можно записать в виде $2x = 4 – 21a$. Отсюда видно, что при любых значениях параметра a оно имеет единственное решение, потому что коэффициент при неизвестной отличен от нуля (равен 2): $x = (4 – 21a) / 2 = 2 – 10{,}5a$.

2) Приведем подобные члены в уравнении $11x + 37 = cx + 8$, и получим $(11 – c)x = –29$. Это уравнение имеет единственное решение $x = –29/(11 – c)$, когда коэффициент при неизвестной отличен от нуля: $11 – c \neq 0$, то есть для всех $c \neq 11$.

В случае когда $11 – c = 0 \Leftrightarrow c = 11$, уравнение $(11 – c)x = –29$ не имеет корней.

3) Откроем скобки и приведем подобные члены:

$7(3x + 2) – d(6 – 4x) = 2e + 15 \Leftrightarrow 21x + 14 – 6d + 4dx = 2e +15 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (21 + 4d)x = 2e + 6d +1$.

Уравнение $(21 + 4d)x = 2e + 6d +1$ имеет единственное решение $x = (2e + 6d + 1)/(21 + 4d)$ когда коэффициент при неизвестной отличен от нуля: $21 + 4d \neq 0$, то есть когда $d \neq –5{,}25$.

Если $21 + 4d = 0 \Leftrightarrow d = –5{,}25$, возможны два варианта:

– уравнение $(21 + 4d)x = 2e + 6d + 1$ не имеет корней, когда $d = –5{,}25$ и $e \neq 15{,}25$. В этом случае уравнение имеет вид $0x = 2e – 30{,}5$ с ненулевой правой частью.

– уравнение $(21 + 4d)x = 2e + 6d + 1$ имеет бесконечно много решений, когда $d = –5,25$ и $e = 15,25$. В этом случае уравнение имеет вид $0x = 0$, и решение можно записать в виде $x = p$, где p может быть любым числом.

Упражнение 6.6 Исследовать уравнения на разрешимость относительно x, и в тех случаях, когда решения существуют, найти их:

С. 1) $4x + 2a = 17a – 87 + 7x$; 2) $11 – 9x + 3c = cx + 18$;
3) $5dx + 4 = 2 – d(x + 3) – 12e$.

Н. 1) $12x – 7 = 21 + 3a$; 2) $19 – 2x = 5cx + 7$;
3) $7x + 36 – 42d = (56 – x)e + 15$.

6.7. Задача

Исследовать системы уравнений на разрешимость относительно x и y, и в тех случаях, когда решения существуют, найти их:

1) $\begin{cases} 13(x-a)+7y=8x+11(y+2); \\ 3x+8a+17y=6x+3(2y-x+10a). \end{cases}$

2) $\begin{cases} 4(x+3b)+7(1-2y)=bx+14(2-y); \\ 3x+7y=6x+32y+10b. \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3(cx-a)+y=cx+2(3y+cx); \\ x+2a+3y=dx+4(5y-6x+7a). \end{cases}$

Решение

1) Откроем скобки и приведем подобные члены:

$$\begin{cases} 13(x-a)+7y=8x+11(y+2); \\ 3x+8a+17y=6x+3(2y-x+10a); \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x-4y=13a+22; \\ 11y=22a. \end{cases}$$

В результате получилась вырожденная система. Поэтому, мы можем определить значение y из второго уравнения: $11y = 22a \Leftrightarrow y = 2a$. Затем, подставим полученное выражение в первое уравнение и вычислим x:

$5x – 4y = 13a + 22 \Leftrightarrow 5x – 4\cdot 2a = 13a + 22 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 5x = 21a + 22 \Leftrightarrow x = 4,2a + 4,4$.

Ответ $(4,2a + 4,4; 2a)$, где a — любое число.

2) Откроем скобки и приведем подобные члены:

$$\begin{cases} 4(x+3b)+7(1-2y)=bx+14(2-y); \\ 3x+7y=6x+32y+10b; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (4-b)x=21-12b; \\ 3x+25y=-10b. \end{cases}$$

В итоге, получилась вырожденная система.

Первое уравнение системы, и соответственно, вся система не имеет решения если $b = 4$.

Если $b \neq 4$, мы получим $x = (21 - 12b)/(4 - b)$. Тогда,

$3(21 - 12b)/(4 - b) + 25y = -10b \Leftrightarrow y = (10b^2 - 4b - 63)/(100 - 25b)$.

Ответ: Если $b = 4$ — система не имеет решения,

если $b \neq 4$ система имеет единственное решение ($(21 - 12b)/(4 - b)$, $(10b^2 - 4b - 63)/(100 - 25b)$.

3) Откроем скобки и приведем подобные члены. В итоге, получится вырожденная система: $\begin{cases} 3(cx-a)+y=cx+2(3y+cx); \\ x+2a+3y=dx+4(5y-6x+7a); \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5y=-3a; \\ (25-d)x-17y=26a; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-0{,}6a; \\ (25-d)x=15{,}8a. \end{cases}$$

Ответ: Если $d \neq 25$ система имеет единственное решение ($15{,}8a/(25 - d); -0{,}6a$), где a — любое число;

если $d = 25$; $a = 0$ система имеет бесконечно много решений (p; 0), где p — любое число;

если $d = 25$; $a \neq 0$ система не имеет решений.

Упражнение 6.7

Исследовать системы уравнений на разрешимость относительно x и y, и в тех случаях, когда решения существуют, найти их:

С. 1) $\begin{cases} 15x-21a)+4y=8x+7(x+2y+3); \\ 8x+7y=6x+5(4y-3+2a). \end{cases}$

2) $\begin{cases} 4-5x+3b+2(1-2y)=bx+14-y; \\ 2(3x+7y)=6x+2by+10b. \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 3cx-d+2y=cx+3y; \\ 9x-2y+3d=4x+5(x-2y+3d). \end{cases}$

Н. 1) $\begin{cases} 11x+6y=8x-3(4y-x+2a); \\ 3a-2x+19y=6x+2(2y-9a). \end{cases}$

2) $\begin{cases} 4x+3y-2b=2x+b(2-y); \\ 13x+6y=6x+3(2y+7b). \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 2cx+5y=6cx+2(3c-5y+x); \\ 5x+2y+3d=x-4(6-x-3y). \end{cases}$

6.8. Теорема

В предыдущем разделе мы обсуждали вырожденные системы линейных уравнений. Настало время перейти к общим системам. Может показаться, что это будет намного сложнее. Но, к счастью, благодаря теореме Крамера особых сложностей не возникает. Предполагаем, что все коэффициенты a_{ij} отличны от нуля. В противном случае имеют место вырожденные системы, которые уже обсуждались.

Теорема

Система

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1; \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2, \end{cases} \tag{6.3}$$

равносильна каждой из следующих систем:

(6.3_1) $\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1; \\ \Delta x = \Delta_x, \end{cases}$ (6.3_2) $\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1; \\ \Delta y = \Delta_y, \end{cases}$

(6.3_3) $\begin{cases} \Delta x = \Delta_x; \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2, \end{cases}$ (6.3_4) $\begin{cases} \Delta y = \Delta_y; \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2. \end{cases}$

Доказательство

Справедливость теоремы следует из теоремы Крамера.

Задача

Исследовать системы уравнений на разрешимость относительно x и y, и в тех случаях, когда решения существуют, найти их:

1) $\begin{cases} 12x - 7y = a; \\ 2x + 3y = 16. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x + 3y = 7; \\ 5x + ay = 13. \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 3x - (c+5)y = d + 2; \\ cx + 2y = 7. \end{cases}$

Решение

1) Решение задачи методом Крамера всегда начинается с вычисления определителя матрицы коэффициентов системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 12 & -7 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 12 \cdot 3 - 2 \cdot (-7) = 50.$$

Так как второе уравнение не содержит параметр, будет проще использовать переход к системе (6.3_3). Тогда,

$\Delta_x = \begin{vmatrix} a & -7 \\ 16 & 3 \end{vmatrix} = 3a + 112$, и согласно теореме,

$$\begin{cases} 12x - 7y = a; \\ 2x + 3y = 16; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta x = \Delta_x; \\ 2x + 3y = 16; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 50x = 3a + 112; \\ 2x + 3y = 16; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0{,}06a + 2{,}24; \\ 2(0{,}06a + 2{,}24) + 3y = 16; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0{,}06a + 2{,}24; \\ y = 3{,}84 - 0{,}04a. \end{cases}$$

2) Так как первое уравнение и Δ_y не содержат параметр, будет проще перейти к (6.3_2). Так как

$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & a \end{vmatrix} = 2a - 15;$ $\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 5 & 13 \end{vmatrix} = 26 - 35 = -9$, получаем

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7; \\ 5x + ay = 13; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y = 7; \\ \Delta y = \Delta_y; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y = 7; \\ (2a - 15)y = -9. \end{cases}$$

Если $2a - 15 = 0 \Leftrightarrow a = 7{,}5$, система не имеет решений.

Если $2a - 15 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 7{,}5,$ получим $\begin{cases} 2x + 3y = 7; \\ (2a - 15)y = -9; \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} 2x + 3[-9 / (2a - 15)] = 7; \\ y = -9 / (2a - 15); \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = (7a - 39) / (2a - 15); \\ y = -9 / (2a - 15). \end{cases}$$

3) Вычислим соответствующие определители:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -(c + 5) \\ c & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 - c[-(c + 5)] = c^2 + 5c + 6;$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & d + 2 \\ c & 7 \end{vmatrix} = 21 - c(d + 2).$$

Согласно теореме,

$$\begin{cases} 3x - (c + 5)y = d + 2; \\ cx + 2y = 7; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta y = \Delta_y; \\ cx + 2y = 7; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (c^2 + 5c + 6)y = d + 2; \\ cx + 2y = 7. \end{cases}$$

Если $c^2 + 5c + 6 = 0 \Leftrightarrow (c + 2)(c + 3) = 0 \Leftrightarrow c = -2$ или $c = -3$ и $d + 2 \neq 0 \Leftrightarrow d \neq -2$ система не имеет решений.

Если $c^2 + 5c + 6 = 0 \Leftrightarrow (c + 2)(c + 3) = 0 \Leftrightarrow c = -2$ или

$c = -3$ и $d + 2 = 0 \Leftrightarrow d = -2$ система имеет бесконечно много решений: $\begin{cases} 0y = 0; \\ cx + 2y = 7; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = p; \\ cx + 2y = 7; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = p; \\ x = (7 - 2p) / c, \end{cases}$

где p — любое число.

Если $c^2 + 5c + 6 \neq 0 \Leftrightarrow (c + 2)(c+ 3) \neq 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow c \neq -2$ и $c \neq -3$ система имеет единственное решение:

$$\begin{cases} (c^2 + 5c + 6)y = d + 2; \\ cx + 2y = 7. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = (d + 2) / (c^2 + 5c + 6); \\ x = [7 - 2(d + 2) / (c^2 + 5c + 6)] / c. \end{cases}$$

Отметим, что коэффициент ***c*** отличен от нуля согласно условиям на коэффициенты системы.

Упражнение 6.8

Исследовать системы уравнений на разрешимость относительно x и y, и в тех случаях, когда решения существуют, найти их:

С. 1) $\begin{cases} 2x - 7y = 5 + a; \\ x + 9y = 6. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x + (3 - b)y = 5; \\ 5x + 4y = 9. \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 11x + (3 - c)y = 14; \\ 5x - 2y = c + 8. \end{cases}$

Н. 1) $\begin{cases} 4x - y = 7; \\ 13x + 3y = a. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 5x + 3y = 4; \\ 8x - ay = 3. \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 3x - cy = 2; \\ (5 - c)x - 2y = c + 8. \end{cases}$

Итоговые упражнения

1. Решите уравнения:
a) $2x - 7 = 0$; b) $3x - 2 = 7 - 5x$; c) $0{,}2x - 5{,}5 = x/3 - 4{,}1$;
d) $5(x - 2)= 7(3x + 2) - 9$; e) $3x = 15a$; f) $3(5 - 2x)/2 + 4x = 1$.

2. Исследовать уравнения на разрешимость относительно x, и в тех случаях, когда решения существуют, найти их:
a) $4a - 5x = -2a$; b) $7x + 3d = 2x$; c) $3cx + 5 = 2$;
d) $2cx - d = 5d$; e) $4cx - 2d = 5n$;
f) $5(3a - x) - 4(2a - 7x) = -3x$; g) $3(5 + 2x) - a (7 - x)= b$.

3. Решите уравнения и запишите ответ в параметрической форме:
a) $2x - 5y = 8$; b) $3x - 8y = 12 - 5y$; c) $2(x + y) = 6x$;
d) $2x - 3y + 5z = 13$; e) $2x +2(7 -19y) = 3z$;
f) $x + 2y + 3z - 4t = 7$; g) $x_1 + 2x_2 + \ldots + nx_n = n$.

4. Если к числу добавить его утроенное значение то получится 88. Найдите число.

5. Продавец продает костюм за \$140, рассчитывая получить прибыль равную 3/4 издержек. Найдите величину издержек и величину прибыли, предполагая, что цена равна сумме прибыли и издержек.
6. Отец старше дочери в четыре раза и старше ее на 27 лет. Сколько лет отцу.
7. Магазин имеет два сорта конфет, один по \$3,34 килограмм, второй по \$2,8. Сколько килограмм конфет каждого сорта нужно использовать, для того чтобы получить 90 кг смеси по \$3,1 за кг.
8. Из аэропорта в северном и южном направлении вылетели два самолета. Самолет, летящий на север, пролетает на 40 км в час больше другого. К концу третьего часа расстояние между ними составило 1800 км. Найдите средние скорости самолетов.
9. Автомобиль, проезжающий 96 км в час покинул город через 24 минуты после грузовика и догнал его через 2 часа. Найдите скорость грузовика.
10. Асан и Улан имеют 1532 сомов. Сколько сомов имеет Асан, если Улан имеет на 188 сомов больше?
11. Исследовать системы уравнений на разрешимость относительно x и y, и в тех случаях, когда решения существуют, найти их:

a) $\begin{cases} 3a - 2x - 5y = 8x + 11y + 2; \\ 13x - 2a + 7y = 7x + 3(2x + 3y + a). \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2(5b + 3x) + 3(7 - 2y) = 6x + 14 - by; \\ 7x + 2y = 6x + 3y + 11b. \end{cases}$

c) $\begin{cases} 5(cx - 7) + 6y = cx + 2(7d + 3y); \\ x + 12d + 3y = 4(5y - 2cx + 7d). \end{cases}$

12. $\begin{cases} 4x + 5y = 3; \\ ax - 7y = 11. \end{cases}$ **13**. $\begin{cases} 2x + 3y = 10 - b; \\ 4x + by = 8. \end{cases}$

14. $\begin{cases} 3x + (8 - c)y = 7; \\ cx + 5y = 7. \end{cases}$ **15**. $\begin{cases} (10 - d)x + 3y = 2; \\ 8x + dy = 4. \end{cases}$

16. Решить систему и нарисовать графики соответствующих уравнений:

a) $\begin{cases} 2x - 5y = 14; \\ 3x - 7y = 21. \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 3x + 2y = 16; \\ 7x + 3y = 21. \end{cases}$

c) $\begin{cases} 5x + 6y = 42; \\ x + 1{,}2y = 10{,}8. \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} -3x + 8y = 36; \\ 6x - 16y = -72. \end{cases}$

17. При каких значениях параметра p система

a) $\begin{cases} 20x + 25y = 2; \\ 4x + py = 3; \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 5x + 2y = 27; \\ 4x + py = 93; \end{cases}$

имеет единственное решение?

18. При каких значениях параметра p система

a) $\begin{cases} 10x + 12{,}5y = 21; \\ 4x + py = 3; \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 11x - 2y = 27; \\ 4x + py = 9; \end{cases}$ не имеет решений?

19. При каких значениях параметра p система

a) $\begin{cases} 20x + 25y = p; \\ 4x + 5y = 3. \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 21x - 12y = 27; \\ 14x + py = 18; \end{cases}$

имеет множество решений?

20. Решить систему и нарисовать графики соответствующих уравнений:

1) $\begin{cases} 4x - 13y = 104; \\ 14x - 45{,}5y = 364. \end{cases}$ **2)** $\begin{cases} 6x - 19{,}5y = 156; \\ 22x - 71{,}5y = 574. \end{cases}$ **3)** $\begin{cases} 132x - 429y = 5148; \\ 45x - 143y = 1170. \end{cases}$

К моменту, когда уже изучен вышеизложенный материал, в АУЦА обычно наступает середина семестра. Поэтому, в такой момент устраивается промежуточная контрольная работа. Предлагаем и Вам проверить себя, и попробовать решить задания подобной работы.

ДЕМОНСТРАЦИОННЫЙ ВАРИАНТ ПРОМЕЖУТОЧНОЙ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ, ОСЕНЬ – 2020

1. KSL – треугольник. M – середина стороны KL.

а) выразить $\overrightarrow{KM}$ в терминах $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

б) выразить $\overrightarrow{SM}$ в терминах $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Дайте свои ответы в простой форме.

2. Даны точки A(12; 4), B(2; – 6), C(16; –4). Точка P делит отрезок AB в соотношении 1:4, точка Q является серединой отрезка BC, точка R делит отрезок AC в соотношении 1:3.

а) Найдите площадь треугольника PQR;

б) Найдите координаты точки T — вершины параллелограмма PQTR;

в) Найдите разложение вектора $\overrightarrow{QT}$ в базисе векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$;

г) Найдите уравнение прямой CD, параллельной AB;

д) Найдите уравнение прямой AL, перпендикулярной к BC.

3. Веб–сервер имеет первоначальную стоимость 10 000 долларов и подлежит линейной амортизации в течение 5 лет со стоимостью утилизации 3000 долларов. a) Найдите выражение, дающее балансовую стоимость на конец года t. b) Какова будет балансовая стоимость сервера в конце второго года?

4. Спрос на определенную модель DVD–плеера составляет 8000 единиц при цене 260 долларов за единицу и 10 000 единиц при цене за единицу 200 долларов. Производитель не будет продавать плееры по цене 100 долларов и ниже. Однако, при каждом увеличении цены за единицу на 50 долларов сверх 100 долларов, производитель будет увеличивать предложение на дополнительные 1000 единиц. Предполагается, что уравнения спроса и предложения линейны. a) Найдите уравнение спроса.

b) Найдите уравнение предложения.

в) Найдите равновесное количество и цену.

5. Затраты на подготовку к выпуску нового вида продукции равны \$2044. Постройте график и определите зону прибыли, если известно, что средние переменные затраты для первых 400 единиц составляют 4 доллара, а для последующих равны \$1,7, а цена (в долларах) равна: a) *14,22;* b) *5,7;* c) *36 – 0,04q.*

6. Алмаз и Вика отправились за покупками на Хэллоуин. Алмаз купил 3 шоколадные тыквы и 8 конфетных ведьм. Он потратил 705 сомов. Вика купила 4 шоколадные тыквы и 6 конфетных ведьм. Она потратила 660 сомов. Найдите цены товаров.

7. Исследуйте систему на разрешимость и напишите решения для каждого случая: a) $\begin{cases} 3x-2y=5; \\ 6x-4y=a. \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x+(m-1)y=3; \\ (m+1)x+4y=-3. \end{cases}$

§7. МЕТОД ГАУССА – МЕТОД ИСКЛЮЧЕНИЯ НЕИЗВЕСТНЫХ

7.1. Введение в метод Гаусса

Пусть нам известно, что на грузовике было перевезено 2 тонны муки в 20 маленьких и 25 больших мешках. Выяснить по этой информации вес каждого мешка невозможно, так как эта задача имеет множество решений. Например, если вес маленького мешка 10 кг, тогда вес большого мешка
(2000 – 20·10):25 = 72 кг; если вес маленького мешка 30 кг, то вес большого мешка *(2000 – 20·30):25 = 56* кг и так далее.

Это обычно бывает в случаях, когда число неизвестных (вес большого мешка и вес маленького мешка) больше, чем число уравнений.

Поэтому, для того чтобы получить точный ответ, необходима дополнительная информация. Это может быть информация о весе отдельного мешка, о другой перевозке и т.п.

Предположим, что стало известно о том, что на втором грузовике перевезено 3 тонны муки в 38 маленьких и 35 больших мешках. Пользуясь этими сведениями, мы можем составить систему уравнений, решить ее и выписать ответ: вес маленького мешка 20 кг, большого — 64 кг.

Если же у нас есть информация о третьем, четвертом и т.д. грузовиках, она может быть использована для проверки. Пусть сказано, что на третьем грузовике перевезено 2,5 тонны муки в 10 маленьких и 40 больших мешках. Подставив данные о весе мешков: *10·20 + 40·64 = 2760*, получаем несовпадение. Следовательно, в полученной нами информации, имеется ошибка

Рассмотрим более подробно решение задачи с двумя грузовиками. Обозначив через x вес маленького мешка, y — большого, получим систему из двух уравнений:

$$\begin{cases} 20x+25y=2000; \\ 38x+35y=3000. \end{cases} \qquad (7.1)$$

Разделим первое уравнение на 20 (получим $x + 1{,}25y = 100$) и умножив на 38 (то есть приравняв коэффициенты при x) отнимем от второго: $-12{,}5y = -800$.

Отсюда, $y = 64$. Подставив найденное значение в первое уравнение системы, получим $20x+25\cdot 64=2000$. Отсюда, $x=20$. Подставив числа $x = 20$ и $y = 64$ во второе уравнение системы (7.1), убедимся, в том, что найденное решение верно.

Распишем преобразования системы более подробно:

$$\begin{cases} 20x+25y=2000; \\ 38x+35y=3000; \end{cases} \xrightarrow{R_1=r_1/20} \begin{cases} x+1,25y=100; \\ 38x+35y=3000; \end{cases} \xrightarrow{R_2=r_2-38r_1}$$

$$\begin{cases} x+1,25y=100; \\ -12,5y=-800; \end{cases} \xrightarrow{R_2=r_2/(-12,5)} \begin{cases} x+1,25y=100; \\ y=64; \end{cases}$$

$$\xrightarrow{R_1=r_1-1,25r_2} \begin{cases} x=20; \\ y=64. \end{cases}$$

Здесь буква r (от англ. слова row — строка) обозначает строку преобразуемой матрицы — старую строку, R — строку преобразованной матрицы — новую строку. Запись $R_1 = r_1/20$, к примеру, означает, что 1–ая строка новой матрицы получается из 1–ой строки старой, путем деления на 20.

Метод, который мы сейчас использовали, называется <u>методом Гаусса</u>.

При решении систем, особенно систем больших размеров методом Гаусса, полезно выписать расширенную матрицу системы, приписав к матрице коэффициентов свободный член, и описывать элементарные преобразования над уравнениями системы в символической форме. Рассмотрим, в качестве примера, решение системы (7.1):

$$\begin{pmatrix} 20 & 25 & \vdots & 2000 \\ 38 & 35 & \vdots & 3000 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1=r_1/20} \begin{pmatrix} 1 & 1,25 & \vdots & 100 \\ 38 & 35 & \vdots & 3000 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2=r_2-38r_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1,25 & \vdots & 100 \\ 0 & -12,5 & \vdots & -800 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2=r_2/(-12,5)} \begin{pmatrix} 1 & 1,25 & \vdots & 100 \\ 0 & 1 & \vdots & 64 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1=r_1-1,25r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \vdots & 20 \\ 0 & 1 & \vdots & 64 \end{pmatrix}.$$

Приведем еще два примера решения системы, описав элементарные преобразования уравнений системы в символической форме:

a) $\begin{cases} -6x+5y=3; \\ 15x-12{,}5y=-4{,}5. \end{cases}$ b) $\begin{cases} -4x+11y=3; \\ 14x-38{,}5y=-10{,}5. \end{cases}$

Решение

a) $\left(\begin{array}{cc|c} -6 & 5 & 3 \\ 15 & -12{,}5 & -4{,}5 \end{array}\right) \xrightarrow[R_1=r_1/5]{} \left(\begin{array}{cc|c} -1{,}2 & 1 & 0{,}6 \\ 15 & -12{,}5 & -4{,}5 \end{array}\right)$

$\xrightarrow[R_2=r_2+12{,}5r_1]{} \left(\begin{array}{cc|c} -1{,}2 & 1 & 0{,}6 \\ 0 & 0 & 3 \end{array}\right).$

Итак, получилось, что система не имеет решения.

b) $\left(\begin{array}{cc|c} -4 & 11 & 3 \\ 14 & -38{,}5 & -10{,}5 \end{array}\right) \xrightarrow[R_1=r_1/(-4)]{} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2{,}75 & -0{,}75 \\ 14 & -38{,}5 & -10{,}5 \end{array}\right)$

$\xrightarrow[R_2=r_2-14r_1]{} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2{,}75 & -0{,}75 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$. То есть, исходная система эквивалентна уравнению $x - 2{,}75y = -0{,}75$. Так как число неизвестных на одно больше, чем число уравнений, одно неизвестное можно взять в качестве параметра: $y = p$. Тогда, $x - 2{,}75p = -0{,}75$, и как следствие, $x = -0{,}75 + 2{,}75p$. Таким образом, ответ $(-0{,}75 + 2{,}75p;\ p)$, где p любое число.

Замечание

При преобразованиях уравнений полезно помнить, что при делении любого целого числа на 2, на 5, их степени и произведения всегда получается конечная десятичная дробь.

Упражнение 7.1

Решите систему, описав элементарные преобразования уравнений системы в символической форме:

C. $\begin{cases} 2x-y=-21; \\ 3x+5y=14. \end{cases}$ **H**. $\begin{cases} 2x+9y=20; \\ 4x-7y=-10. \end{cases}$

7.2. Метод Гаусса

При решении систем методом Гаусса выделяются две части: прямой ход и обратный ход. Каждая часть делится на шаги.

Прямой ход

На первом шаге нужно выбрать уравнение, поставить это уравнение на первое место и с помощью элементарных преобразований исключить из всех остальных уравнений системы одно и тоже неизвестное.

На втором шаге рассматриваются второе и далее уравнения полученной на первом шаге системы. Выбирается уравнение и ставим выбранное уравнение на второе место. С помощью элементарных преобразований из остальных уравнений исключается одно и тоже неизвестное. И т.д. и т.п.

При преобразованиях системы могут получаться уравнения вида $0{\cdot}x + 0{\cdot}y + \ldots + 0{\cdot}z = 0$, которые удовлетворяются при всех значениях неизвестных и следовательно, могут быть вычеркнуты.

После окончания прямого хода получится система, равносильная исходной — система, у которой каждое последующее уравнение имеет меньшее число неизвестных.

Возможны 3 принципиально различные ситуации:

А. полученная система не имеет решения: последнее уравнение системы имеет вид $0{\cdot}x = b$, где $b \neq 0$.

В. полученная система имеет единственное решение: последнее уравнение имеет вид $ax = b,\ a \neq 0$, а число уравнений полученной системы равно числу неизвестных.

С. полученная система имеет бесконечно много решений. Эта ситуация имеет место, когда число неизвестных в последнем уравнении больше одного или же, если какое–нибудь уравнение преобразованной системы имеет на два или более неизвестных меньше чем предыдущее, исключая случай **А**.

Обратный ход

Он применяется в случаях **В** и **С**, для того чтобы выписать решение системы.

В случае **В**, на первом шаге находим решение последнего уравнения системы и подставляем найденное значение в предыдущие уравнения. В итоге мы получим систему из $(n - 1)$ уравнений, последнее уравнение которой зависит только от одного переменного. На следующих шагах мы будем повторять процесс до тех пор пока не будут найдены значения всех неизвестных.

В случае **С** нужно действовать таким же образом, только в тех случаях, когда последнее уравнение рассматриваемой системы имеет k ($k > 1$) неизвестных, необходимо ($k - 1$) неизвестных выбрать произвольным образом и выразить остальные неизвестные через них в параметрической форме.

Задача

Это результат наблюдений Елены. Первый грузовик перевез 2345 кг муки в 23 маленьких, 19 средних и 10 больших мешках. Второй грузовик перевез 2835 кг муки в 12 маленьких, 25 средних и 16 больших мешках, третий грузовик перевез 1865 кг муки в 34 маленьких, 13 средних и 4 больших мешках. Требуется определить вес каждого вида мешков.

Решение

Обозначив через x вес маленького мешка, y — среднего, z — большого, получим систему из трех уравнений:

$$\begin{cases} 23x + 19y + 10z = 2345; \\ 12x + 25y + 16z = 2835; \\ 34x + 13y + 4z = 1865. \end{cases}$$

Будет удобно использовать запись системы в виде расширенной матрицы коэффициентов:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 23 & 19 & 10 & 2345 \\ 12 & 25 & 16 & 2835 \\ 34 & 13 & 4 & 1865 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{R_2 = r_2 - 1{,}6r_1 \\ R_3 = r_3 - 0{,}4r_1}]{R_1 = r_1 : 10} \left(\begin{array}{ccc|c} 2{,}3 & 1{,}9 & 1 & 234{,}5 \\ -24{,}8 & -5{,}4 & 0 & -917 \\ 24{,}8 & 5{,}4 & 0 & 927 \end{array}\right)$$

(Мы используем коэффициент 10 первого уравнения, как самый простой для исключения коэффициента z в других уравнениях.)

$$\xrightarrow[\substack{R_2 = r_2 \\ R_3 = r_3 + r_2}]{R_1 = r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2{,}3 & 1{,}9 & 1 & 234{,}5 \\ 12 & 25 & 16 & 2835 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{array}\right).$$

Получилась система, которая не имеет решения, или, как ее еще называют, с несовместной системой. Это означает, что в наблюдениях Елены есть какая–то ошибка.

Упражнение 7.2

С. По словам Аскара, в первый день его магазин продал 8 килограммов конфет, 5 кг печенья и 7 кг муки и заработал 3101 сом. На второй день было продано 2 кг конфет, 7 кг печенья и 9 кг муки; выручка составила 2187 сомов. На третий день было продано 14 кг конфет, 3 кг печенья и 5 кг муки; выручка составила 4017 сомов. Определите цены на эти продукты.

Н. Решите систему методом Гаусса $\begin{cases} 2x+8y+6z=20; \\ 5x+2y-2z=-2; \\ 3x-6y-8z=-21. \end{cases}$

7.3. **Задача**

Грегори имеет акции типа А, В и С. Он подвел итоги финансового года. Выяснилось: удвоенный доход по акциям В был на 4 тысячи долларов больше, чем утроенная сумма дохода по акциям А и С. Сумма удвоенного дохода по акциям А и дохода по акциям В была на 5000 долларов больше, чем доход по акциям С. Сумма дохода по акциям А и удвоенного дохода по акциям С на 7 тысяч долларов меньше, чем утроенный доход по акции В. Найдите доходы по акциям вида А, В и С.

Решение

Пусть a — доход по акциям А, b — доход по акциям В, z — доход по акциям С (в тысячах долларов). Тогда имеет место система линейных алгебраических уравнений: $\begin{cases} 2b-4=3(a+c); \\ 2a+b=c+5; \\ a+2c=3b-7. \end{cases}$

Перепишем систему в стандартной форме: $\begin{cases} 3a-2b+3c=-4; \\ 2a+b-c=5; \\ a-3b+2c=-7. \end{cases}$

Далее, запишем ее в виде расширенной матрицы коэффициентов:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 3 & -4 \\ 2 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & -3 & 2 & -7 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3=r_3+3r_2]{R_1=r_2,\; R_2=r_1+2r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 5 \\ 7 & 0 & 1 & 6 \\ 7 & 0 & -1 & 8 \end{array}\right)$$

Мы использовали коэффициент 1 из простого второго уравнения для того чтобы исключить коэффициент b из других уравнений.

$$\xrightarrow[R_3=r_3-r_2]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 5 \\ 7 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3=r_3:(-2)]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 5 \\ 7 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Теперь можно начать обратный ход:

$$\xrightarrow[R_3=r_3]{\substack{R_1=r_1+r_3\\R_2=r_2-r_3}}\left(\begin{array}{ccc|c}2&1&0&4\\7&0&0&7\\0&0&1&-1\end{array}\right)\xrightarrow{R_2=r_2:7}\left(\begin{array}{ccc|c}2&1&-1&5\\7&0&1&6\\0&0&1&-1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_3=r_3]{R_1=r_1-2r_2}\left(\begin{array}{ccc|c}0&1&0&2\\1&0&0&1\\0&0&1&-1\end{array}\right)\xrightarrow[R_3=r_3]{\substack{R_1=r_2\\R_2=r_1}}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&1\\0&1&0&2\\0&0&1&-1\end{array}\right).$$ Ответ: (1; 2; –1)

Подставив найденные значения в уравнения исходной системы можно убедиться в правильности найденного решения.

Упражнение 7.3

С. Решите систему методом Гаусса $\begin{cases}2x+y+2z=3;\\x-2y-3z=1;\\3x+2y+4z=5.\end{cases}$

Н. Назар вложил 200 тысяч сомов на три депозитных счета под 9%, 10% и 10,5%, соответственно, а через год получил 219 900 сомов обратно. Известно, что на первом и втором счетах вместе в 1,5 раза больше денег, чем на третьем. Сколько денег было положено на каждый счет?

7.4. Задача

Айдай планирует выращивать кур, уток и индюков. Они будут потреблять три вида пищи: A, B и C. Согласно плану, курица будет потреблять одну единицу каждой пищи в неделю. Утка будет потреблять одну единицу A, две единицы B и три единицы C. Индейка будет потреблять 1, 3 и 5 единиц соответственно. Найдите количество кур, уток и индюков, которых Айдай может вырастить, зная, что 90 единиц A, 180 единиц B и 270 единиц C будут потребляться еженедельно.

Решение

Пусть x число кур, y — уток, z — индюков. Тогда имеет место система линейных уравнений: $\begin{cases}x+y+z=90;\\x+2y+3z=180;\\x+3y+5z=270.\end{cases}$

Перепишем ее в виде расширенной матрицы коэффициентов и преобразуем: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 90 \\ 1 & 2 & 3 & 180 \\ 1 & 3 & 5 & 270 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{R_2=r_2-r_1 \\ R_3=r_3-r_1}]{R_1=r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 90 \\ 0 & 1 & 2 & 90 \\ 0 & 2 & 4 & 180 \end{array}\right)$

(*Напоминаем, что запись* $R_2 = r_2 - r_1$ *означает, что новое второе уравнение получится, если из старого второго отнять первое и так далее*.) $\xrightarrow[R_3=r_3-2r_2]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 90 \\ 0 & 1 & 2 & 90 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$

В результате выяснилось, что исходная система эквивалентна следующей: $\begin{cases} x+y+z=90; \\ y+2z=90. \end{cases}$ То есть, имеет место случай **С**.

Последнее уравнение системы имеет два неизвестных, поэтому одно из них можно использовать в качестве параметра.

Пусть $z = a$. Тогда $\begin{cases} x+y=90-a; \\ y=90-2a. \end{cases}$

Поэтому, $\begin{cases} x+90-2a=90-a; \\ y=90-2a, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=a; \\ y=90-2a. \end{cases}$

Решение системы: $x = a;\ y = 90 - 2a;\ z = a,$ где a произвольное число. Так как x, y и z обозначают число кур, уток и индюков, они должны быть целыми и неотрицательными. Поэтому, из неравенства $0 \le 90 - 2a$, получаем $a = 0;\ 1;\ \ldots;\ 45.$ Итак, выяснилось, что задача имеет 46 различных решений. Например, Айдай может ограничится только утками — решение (0; 90; 0); только курами и индюками — решение (45; 0; 45); выращивать равное количество — решение (30; 30; 30).

Замечание

Обратный ход также можно записать в матричной форме.

Упражнение 7.4. Решите системы методом Гаусса:

С. $\begin{cases} 5x-7y+2z+t=1; \\ 2y+3z=12; \\ 8z=56. \end{cases}$ **Н**. $\begin{cases} 2x+y-2z=3; \\ x-2y-3z=1; \\ 4x-3y-8z=5. \end{cases}$

Итоговые упражнения

1–6. Решите системы методом Гаусса

1. $\begin{cases} 2x - 3y + 4z = -4; \\ x + 5y - 2z = 15; \\ 4x + 2y + 6z = 10. \end{cases}$ **2**. $\begin{cases} 3x + y + z = 4; \\ 2x + 2y + 3z = 1; \\ 3x - y - 2z = 7. \end{cases}$ **3**. $\begin{cases} x - 3y + 3z = -2; \\ 2x + y - 2z = 3; \\ 3x - y + z = 2. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 3x + 2y - z = 1; \\ x + y + 2z = 11; \\ 5x + 3y - 4z = 19. \end{cases}$ **5.** $\begin{cases} 3x - 2y + 4z = 9; \\ 2x + z = 3; \\ 5x - 2y + 5z = 13. \end{cases}$

6. Вклад величиной в $5000 был размещен в трех инвестиционных компаниях под 6, 7 и 8 процентов годовых. Общий годовой доход составил $358, при этом доход от первых двух вкладов превысил доход от третьего на $70. Найти величины вкладов в каждую компанию.

7. С покупателя купившего 2 литра разливного молока, 3 бутылки кефира и сдавшего одну бутылку продавец взял $6. Покупки второго покупателя: 3 бутылки молока, 4 бутылки кефира, были оценены в $10,5, а третьего, купившего 3 литра разливного молока, 2 бутылки кефира и сдавшего 2 бутылки, в $5. Какова цена каждого вида покупки? (Все бутылки считаем литровыми, разливное молоко и бутылочное молоко стоят одинаково.)

В дополнении к этому параграфу приведены примеры решения методом Гаусса систем четвертого порядка.

Дополнение

а) $\begin{cases} x + 2y - 3z + 4t = 7; \\ 2x + 5y + z - 2t = 5; \\ 3x - 7y + 4z + 5t = -11; \\ 7x + 2y - z + 11t = 6. \end{cases}$

Запишем систему в виде расширенной матрицы:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 1 & -2 & 5 \\ 3 & -7 & 4 & 5 & -11 \\ 7 & 2 & -1 & 11 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{R_3=r_3-r_1 \\ R_4=r_4-7r_1}]{\substack{R_1=r_2 \\ R_2=r_2-2r_1}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 7 & -10 & -9 \\ 0 & -13 & 13 & -7 & -32 \\ 0 & -12 & 20 & -17 & -43 \end{array}\right)$$

(*Напоминаем, что запись* $R_1 = r_1$ *означает, что первое уравнение остается неизменным,* $R_2 = r_2 - 2R_1$ *означает, что новое второе уравнение получится, если из старого второго отнять удвоенное первое и так далее*.)

$$\xrightarrow[\substack{R_3=r_3+13r_2\\ R_4=r_4+12r_2}]{}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 & 7\\ 0 & 1 & 7 & -10 & -9\\ 0 & 0 & 104 & -137 & -149\\ 0 & 0 & 104 & -137 & -151 \end{array}\right)\xrightarrow[R_4=r_4-r_3]{}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 & 7\\ 0 & 1 & 7 & -10 & -9\\ 0 & 0 & 104 & -137 & -149\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right).$$

Таким образом, данная система эквивалентна следующей:

$$\begin{cases} x+2y-3z+4t=7;\\ y+7z-10t=-9;\\ 104z-137t=-149;\\ 0=-2. \end{cases}$$

Следовательно, имеет место система, которая не имеет решения, или, как ее еще называют, несовместная система.

b) $$\begin{cases} x - y + 2z - 3t = 1;\\ x + 4y - z - 2t = -2;\\ x - 4y + 3z - 2t = -2;\\ x - 8y + 5z - 2t = -2. \end{cases}$$

Начинаем прямой ход метода Гаусса:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -3 & 1\\ 1 & 4 & -1 & -2 & -2\\ 1 & -4 & 3 & -2 & -2\\ 1 & -8 & 5 & -2 & -2 \end{array}\right)\xrightarrow[\substack{R_3=r_3-r_1\\ R_4=r_4-r_1}]{\substack{R_1=r_1\\ R_2=r_2-r_1}}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -3 & 1\\ 0 & 5 & -3 & 1 & -3\\ 0 & -3 & 1 & 1 & -3\\ 0 & -7 & 3 & 1 & -3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{R_3=r_3-r_2\\R_4=r_4-r_2}]{\substack{R_1=r_1\\R_2=r_2}}\left(\begin{array}{cccc|c}1&-1&2&-3&1\\0&5&-3&1&-3\\0&-8&4&0&0\\0&-12&6&0&0\end{array}\right)\xrightarrow[\substack{R_3=r_3:4\\R_4=r_4-1{,}5r_1}]{\substack{R_1=r_1\\R_2=r_2}}\left(\begin{array}{cccc|c}1&-1&2&-3&1\\0&5&-3&1&-3\\0&-2&1&0&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right).$$

Итак, мы имеем дело с бесконечным числом решений.

Последнее уравнение системы $\begin{cases}x-y+2z-3t=1;\\5y-3z+t=-3;\\2y+z=0\end{cases}$ имеет два неизвестных, поэтому одно из них можно использовать в качестве параметра.

Пусть $y = a$. Тогда $\begin{cases}x+2z-3t=1+a;\\-3z+t=-3-5a;\\z=-2a;\end{cases}$ — начинаем обратный ход.

Вставим значение z: $\begin{cases}x-3t=1+a+4a;\\t=-3-5a-6a,\end{cases}$ <=> $\begin{cases}x=-8-28a;\\t=-3-11a.\end{cases}$

Ответ: $x = -8 - 28a$; $y = a$; $z = -2a$; $t = -3 - 11a$, где a произвольное число.

Замечание

Обратный ход также можно записать матричной форме.

c) $\begin{cases}x+2y+3z+4t=7;\\2x+y+2z+3t=6;\\3x+2y+z+2t=7;\\4x+3y+2z+t=18.\end{cases}$

Решение

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&3&4&7\\2&1&2&3&6\\3&2&1&2&7\\4&3&2&1&18\end{array}\right)\xrightarrow[\substack{R_3=r_3-3r_1\\R_4=r_4-4r_1}]{\substack{R_1=r_1\\R_2=r_2-2r_1}}\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&3&4&7\\0&-3&-4&-5&-8\\0&-4&-8&-10&-14\\0&-5&-10&-15&-10\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{R_3=r_3+4R_2 \\ R_4=r_4+3R_2}]{\substack{R_1=r_1 \\ R_2=r_4:(-5)}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{R_3=r_4:2 \\ R_4=r_3:2}]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right).$$

(Начинаем обратный ход.)

$$\xrightarrow[\substack{R_3=r_3-2r_4 \\ R_4=r_4}]{\substack{R_1=r_1-4r_4 \\ R_2=r_2-3r_4}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 & 19 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{R_1=r_1-3r_3 \\ R_2=r_2-2r_2}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\substack{R_1=r_1-2r_2 \\ R_2=r_2}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right).$$ Ответ: $(2;\ 1;\ 5;\ –3)$

Подставив найденные значения в уравнения исходной системы можно убедиться в правильности найденного решения.

Упражнения

1–4. Решите системы методом Гаусса:

1. $\begin{cases} x+2y-3z+5t=1; \\ x+3y-13z+22t=-1; \\ 3x+5y+z-2t=5; \\ 2x+3y+4z-7t=4. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x-2y+3z-4t=2; \\ 3x+3y-5z+t=-3; \\ -2x+y+2z-3t=5; \\ 3x+3z-10t=8. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x+2y+3z-2t=1; \\ 2x-y-2z-3t=2; \\ 3x+2y-z+2t=21; \\ 2x-3y+2z+t=11. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x-y+2z+2t+7u=1; \\ 2x-3y+2z+t-2u=-2; \\ 3x-5y+2z-3t+8u=7; \\ -4x+12y+8z+10t+11u=52. \end{cases}$

§8. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ. МЕТОД КРАМЕРА

8.1. Определители

Определителем (детерминантом) квадратной матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \dots & a_{3n} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & \dots & a_{4n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{n4} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad (8.1)$$

называется число, которое обозначается *detA* или

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \dots & a_{3n} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & \dots & a_{4n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{n4} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$ и вычисляется по правилу:

a) определитель матрицы порядка 1 равен элементу матрицы: $\det(a) = a;$

b) определитель матрицы порядка *n* равен:

$\det A = a_{11}\det A_1 - a_{21}\det A_2 + a_{31}\det A_3 - \dots + (-1)^{n-1} a_{n1}\det A_n$, где $\det A_k$ определитель матрицы порядка *n–1,* полученной из матрицы *A* вычеркиванием *k*–той строки и первого столбца.

Может показаться, что в этом определении не все в порядке. Ведь для того, чтобы вычислить определитель матрицы порядка *n* нужно использовать определители матриц порядка *(n – 1),* которые неизвестны. К счастью, это не так. Пункт b) определения говорит, что определитель матрицы порядка *(n – 1)* известен, если известны определители матриц порядка *(n – 2)* и т.д. и т.п. А эта цепочка имеет конец — определитель матрицы первого порядка известен из пункта *a).*

Прием использованный в определении называется разложением определителя по первому столбцу, числа $\det A_k$ — <u>минорами</u>, соответствующими элементам a_{k1}

Задача

Вычислить определитель $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$.

Решение

Из определения следует, что

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a\cdot\det(d) - c\cdot\det(b) = a\cdot d - c\cdot b.$$

При вычислении определителей второго порядка, нет необходимости каждый раз обращаться к определению. В предыдущей задаче мы показали, что определитель порядка 2 равен произведению элементов матрицы, стоящих на главной диагонали минус произведение элементов второй диагонали.

Упражнение 8.1. Вычислить определитель:

С. $\begin{vmatrix} 8 & -12 \\ 7 & 3 \end{vmatrix}$. **Н.** $\begin{vmatrix} -4 & 21 \\ 3 & 15 \end{vmatrix}$.

8.2. Задача

Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 3 & -2 & -10 \\ 7 & 8 & -2 \\ -10 & 0 & 9 \end{vmatrix}$.

Решение

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & -10 \\ 7 & 8 & -2 \\ -10 & 0 & 9 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 8 & -2 \\ 0 & 9 \end{vmatrix} - 7\begin{vmatrix} -2 & -10 \\ 0 & 9 \end{vmatrix} + (-10)\begin{vmatrix} -2 & -10 \\ 8 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= 3(72-0) - 7(-18-0) + (-10)(4-(-80)) = -498.$$

Упражнение 8.2. Вычислить определитель:

С. $\begin{vmatrix} 5 & -12 & 10 \\ -4 & 8 & 2 \\ 6 & 4 & 3 \end{vmatrix}$. **Н.** $\begin{vmatrix} 15 & 2 & -20 \\ 4 & -8 & 12 \\ 6 & -4 & 13 \end{vmatrix}$.

8.3. Теорема Крамера

Если число Δ, являющееся определителем матрицы коэффициентов системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_2, \\ .... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases} \qquad (8.2)$$

отлично от нуля, то система имеет единственное решение $\{\Delta_1 / \Delta;\ \Delta_2 / \Delta;\ ...;\ \Delta_n / \Delta\}$, где Δ_k — определитель, который получится, если в определителе Δ столбец с номером k заменить на столбец свободных членов системы (8.2) — столбец, состоящий из чисел b_m.

Доказательство теоремы можно увидеть в ***Дополнении,*** которое расположено в конце этого параграфа.

Задача

Кондитерская торгует тремя видами тортов. В четверг, когда было продано 12 маленьких, 6 средних и один большой торты, выручка составила $330. Соответствующие данные в пятницу 15 маленьких; 9 средних; 3 больших; $495. В субботу: 20 маленьких; 13 средних; 5 больших; $710. Определите цену каждого вида торта.

Решение

Обозначим число маленьких тортов через x; средних — y; больших — z. В результате получится система

$$\begin{cases} 12x + 6y + z = 330; \\ 15x + 9y + 3z = 495; \\ 20x + 13y + 5z = 710. \end{cases} \qquad (8.3)$$

Для того чтобы вычислить определитель матрицы коэффициентов системы (8.3) используем разложение по первому столбцу:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 12 & 6 & 1 \\ 15 & 9 & 3 \\ 20 & 13 & 5 \end{vmatrix} = 12\begin{vmatrix} 9 & 3 \\ 13 & 5 \end{vmatrix} - 15\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 13 & 5 \end{vmatrix} + 20\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 9 & 3 \end{vmatrix} =$$

$= 12(9{\cdot}5 - 13{\cdot}3) - 15(6{\cdot}5 - 13{\cdot}1) + 20(6{\cdot}3 - 9{\cdot}1) =$
$=12{\cdot}6 - 15{\cdot}\,17 + 20{\cdot}\,9 = -3.$

Заменив элементы первого столбца на соответствующие числа из правой части, получим

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 330 & 6 & 1 \\ 495 & 9 & 3 \\ 710 & 13 & 5 \end{vmatrix} = 330\begin{vmatrix} 9 & 3 \\ 13 & 5 \end{vmatrix} - 495\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 13 & 5 \end{vmatrix} + 710\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 9 & 3 \end{vmatrix}.$$

Заметим, что все определители второго порядка были вычислены при определении Δ. Поэтому, $\Delta_x = 330{\cdot}6 - 495{\cdot}\,17 + 710{\cdot}\,9 = -45$. Отсюда, по правилу Крамера: $x = \Delta_x/\Delta = -45/(-3) = 15$.

Далее, заменим элементы второго столбца на соответствующие числа из правой части и получим:

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 12 & 330 & 1 \\ 15 & 495 & 3 \\ 20 & 710 & 5 \end{vmatrix} = 12\begin{vmatrix} 495 & 3 \\ 710 & 5 \end{vmatrix} - 15\begin{vmatrix} 330 & 1 \\ 710 & 5 \end{vmatrix} + 20\begin{vmatrix} 330 & 1 \\ 495 & 3 \end{vmatrix} =$$

$=12(495{\cdot}5 - 710{\cdot}3) - 15(330{\cdot}5 - 710{\cdot}1) + 20(330{\cdot}3 - 495{\cdot}1) =$
$=12{\cdot}345 - 15{\cdot}940 + 20{\cdot}495 = -60$. Тогда, $y = (-60)/(-3) = 20$.

Таким же образом, заменив третий столбец, получим:

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 12 & 6 & 330 \\ 15 & 9 & 495 \\ 20 & 13 & 710 \end{vmatrix} = 12\begin{vmatrix} 9 & 495 \\ 13 & 710 \end{vmatrix} - 15\begin{vmatrix} 6 & 330 \\ 13 & 710 \end{vmatrix} + 20\begin{vmatrix} 6 & 330 \\ 9 & 495 \end{vmatrix}$$

$= 12(9{\cdot}710 - 13{\cdot}495) - 15(6{\cdot}710 - 13{\cdot}330) + 20(6{\cdot}495 - 9{\cdot}330) =$
$=12{\cdot}(-45) - 15{\cdot}(-30) + 20{\cdot}0 = -90$, и $z = (-90)/(-3) = 30$.

Выяснилось, что цена маленького торта \$15, среднего — \$20, большого — \$30.

Упражнение 8.3. Решить системы:

C. $\begin{cases} 2x - y + 7z = -21; \\ 3x + 5y + 2z = 33; \\ 7x - 2y + 3z = 0. \end{cases}$ **H.** $\begin{cases} 2x + 8y + 6z = 20; \\ 4x + 2y - 2z = -2; \\ 3x - y + z = 11. \end{cases}$

8.4. Площадь треугольника

Многие геометрические задачи решаются проще при использовании координат. Одним из ярких примеров подобного рода является задача определения площади треугольника.

Итак, рассмотрим треугольник с вершинами в точках $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$, $C(x_C, y_C)$.

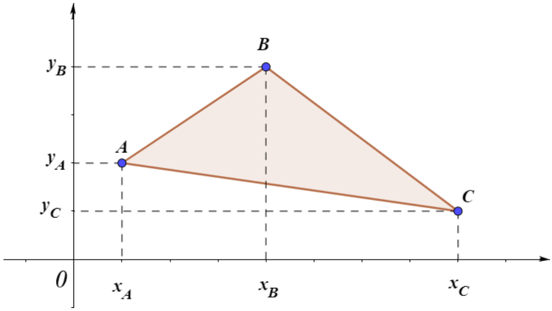


Рисунок 8.1

Нетрудно понять (увидеть), что площадь треугольника ABC равна разности между площадью трапеции $y_B BC y_C$ и суммой площадей трапеций $y_B BA y_A$ и $y_A AC y_C$.

При этом,

площадь трапеции $y_B BC y_C$ равна $\dfrac{x_B + x_C}{2}(y_B - y_C)$;

площадь трапеции $y_B BA y_A$ равна $\dfrac{x_B + x_A}{2}(y_B - y_A)$;

площадь трапеции $y_A AC y_C$ равна $\dfrac{x_A + x_C}{2}(y_A - y_C)$.

Следовательно,

$$S_{ABC} = \frac{x_B + x_C}{2}(y_B - y_C) - \frac{x_B + x_A}{2}(y_B - y_A) - \frac{x_A + x_C}{2}(y_A - y_C) =$$

$$= \frac{1}{2}(x_B y_B - x_B y_C + x_C y_B - x_C y_C) - \frac{1}{2}(x_B y_B - x_B y_A + x_A y_B - x_A y_A) -$$

$$- \frac{1}{2}(x_A y_A - x_A y_C + x_C y_A - x_C y_C) =$$

$$= -\frac{1}{2}(x_B y_C - x_C y_B) + \frac{1}{2}(x_A y_C - x_C y_A) - \frac{1}{2}(x_A y_B - x_B y_A).$$

Обратим внимание на то, что выражения в последних круглых скобках можно записать в виде определителей 2–го порядка, которые можно собрать в определитель 3–го порядка:

$$S_{ABC} = -\frac{1}{2}\left(1 \cdot \begin{vmatrix} x_B & y_B \\ x_C & y_C \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} x_A & y_A \\ x_C & y_C \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} x_A & y_A \\ x_B & y_B \end{vmatrix}\right) = -\frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & x_A & y_A \\ 1 & x_B & y_B \\ 1 & x_C & y_C \end{vmatrix}.$$

Отметим, что при ином расположении вершин треугольника может измениться знак определителя. Но это не повод для беспокойства: всегда можно брать половину абсолютного значения (модуля) величины соответствующего определителя.

Итак, доказано, что площадь треугольника с вершинами в точках $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$, $C(x_C, y_C)$ можно вычислить по формуле $S_{ABC} = \frac{1}{2}\left|\det T\right|$, где $\det T = \begin{vmatrix} 1 & x_A & y_A \\ 1 & x_B & y_B \\ 1 & x_C & y_C \end{vmatrix}$.

Упражнение 8.4. Вычислить площадь треугольника, вершины которого имеют координаты:

С. *(5, –12), (10, 2), (8, –4)* **Н.** *(6, 4), (3, 15), (2, 20)*

8.5. Собственные числа и вектора

Рассмотрим матричное уравнение

$$AX = kX, \tag{8.4}$$

где A является квадратной матрицей, k — число.

Нулевой столбец является решением уравнения (8.4). В этой ситуации интересны ненулевые решения.

Определение

Число k называется собственным (характеристическим) значением квадратной матрицы A, если существует ненулевая матрица–столбец X такая, что $AX = kX$.

Если k является собственным значением матрицы A, то каждое ненулевое решение уравнения (8.4) называется собственным вектором матрицы A, соответствующим собственному значению k.

Теперь мы будем искать собственные значения.

Пусть $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$, $\quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Тогда уравнение (8.4) равносильно системе

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = kx_1, \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = kx_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = kx_n, \end{cases}$$

которое можно переписать в виде

$$\begin{cases} (a_{11} - k)x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{11}x_1 + (a_{12} - k)x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + (a_{nn} - k)x_n = 0. \end{cases} \qquad (8.5)$$

Однородная система (система с нулевой правой частью) всегда имеет нулевое решение. Следовательно, система (8.5) имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда определитель матрицы ее коэффициентов равен нулю.

Итак, число k является собственным значением, если равен нулю определитель $C(k) = \begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - k & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - k \end{vmatrix}$.

Функция $C(k)$ называется характеристическим многочленом (полиномом) матрицы A. Так как степень полинома $C(k)$ равна n, уравнение $C(k) = 0$ имеет n корней. Поэтому, чтобы найти собственные векторы матрицы, соответствующие собственному значению k, мы должны вставить значение k в (8.5) и решить систему.

Пример

Для того чтобы найти собственные числа и вектора матрицы $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, составим характеристическое уравнение $\begin{vmatrix} 2-k & 1 \\ 2 & 3-k \end{vmatrix} = 0$. Оно эквивалентно квадратному уравнению $(2-k)(3-k)-2=0 \;\Leftrightarrow\; k^2-5k+4=0$. Корни этого уравнения $k_1=1;\; k_2=4$.

Возмем $k=1$ и составим систему вида (8.5), ненулевыми решениями которой будут собственные вектора:

$$\begin{cases} (2-1)x+y=0; \\ 2x+(3-1)y=0; \end{cases} <=> \begin{cases} x+y=0; \\ 2x+2y=0; \end{cases} <=> \begin{cases} x+y=0; \\ 0=0. \end{cases}$$

Если $x=a$, тогда $y=-a$. Следовательно, собственные вектора, отвечающие собственному значению $k=1$, это вектора $\begin{pmatrix} a \\ -a \end{pmatrix}$, где a — произвольное ненулевое число.

Если $k=4$, тогда

$$\begin{cases} (2-4)x+y=0; \\ 2x+(3-4)y=0; \end{cases} <=> \begin{cases} -2x+y=0; \\ 2x-y=0; \end{cases} <=> \begin{cases} y=2x; \\ 0=0. \end{cases}$$

Это означает, что собственные вектора, отвечающие собственному значению $k=4$, это вектора $\begin{pmatrix} b \\ 2b \end{pmatrix}$,

где b произвольное ненулевое число.

Упражнение 8.5.

Найдите собственные числа и вектора матрицы:

C. $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 6 \\ -2 & 1 & 12 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ **H.** $\begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}$

Итоговые упражнения

1–10. Вычислить определители:

1. $\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 8 \end{vmatrix}$ **2**. $\begin{vmatrix} -7 & -15 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$ **3**. $\begin{vmatrix} 2-x & 1 \\ 3 & x \end{vmatrix}$ **4**. $\begin{vmatrix} 8389 & 16778 \\ 234314 & 468628 \end{vmatrix}$

5. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 5 \\ 5 & 3 & 4 \end{vmatrix}$ **6**. $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 7 & 2 & 3 \\ 5 & -1 & -2 \end{vmatrix}$ **7**. $\begin{vmatrix} 0 & a & a \\ a & 0 & a \\ a & a & 0 \end{vmatrix}$

8. $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{vmatrix}$ **9**. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 0 & 4 \\ -2 & 3 & 0 & 5 \\ -3 & 4 & 1 & 6 \end{vmatrix}$ **10.** $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 5 & 6 & 0 & 1 \\ 0 & 7 & 8 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

11–14. Решить системы:

11. $\begin{cases} 2x - 3y + 7z = 28; \\ 3x + 5y - 10z = -29; \\ 7x - 3z = 5. \end{cases}$ **12.** $\begin{cases} 3x + y + z = 3; \\ 2x + 3y + 4z = 3; \\ 4x + 9y + 16z = 11. \end{cases}$

13. $\begin{cases} 10x - 3y - 7z = 16; \\ 3x + 2y - 15z = -5; \\ 7y - 5z = 6. \end{cases}$ **14**. $\begin{cases} x + y + 6z = 3; \\ -x + 3y + z = 3; \\ 4x + 8y + 30z = 21. \end{cases}$

15. Компания Alfa производит три вида люстр: A, B и C. Каждая люстра изготавливается в двух цехах, I и II. Время затрачиваемое в каждом цехе и прибыль получаемая от каждой люстры, приведена в таблице:

	A	B	C
Человеко–часы в I	2	3	1
Человеко–часы в II	4	2	3
Прибыль	$5	$4	$3

Сколько люстр каждого вида было произведено, если известно, что компания затратила 615 человеко–часов в I, 1040 человеко–часов в II и получила общую прибыль $1330?

16. Компания Beta производит три вида товара: K, L и M. Каждый товар изготавливается в трех цехах. Время затрачиваемое в каждом цехе на единицу каждого вида товара, дано в таблице:

	K	L	M
Сборка	2	3	2
Настройка	3	1	3
Упаковка	2	1,5	1

Сколько товара каждого вида было произведено, если известно, что компания затратила 1832 человеко–часов на сборке, 1558 человеко–часов на настройке и 1136 человеко–часов на упаковке?

17. Вычислить площадь треугольника, вершины которого имеют координаты: **1)** *(–5, 2), (8, 12), (5, 14)* **2)** *(6, –4), (–3, 5), (2, 2)*.

18. Найдите собственные числа и вектора матрицы: $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$.

19. Найдите собственные числа и вектора матрицы: $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 7 & 1 & 5 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}$.

Дополнение. Теорема Крамера

Если Δ *— определитель матрицы коэффициентов системы линейных алгебраических уравнений*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_2, \\ .... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases} \tag{A1}$$

отличен от нуля, то система имеет единственное решение $\{\Delta_1 / \Delta;\ \Delta_2 / \Delta;\ ...;\ \Delta_n / \Delta\}$, *где* Δ_k *— определитель, который получится, если в* Δ *столбец с номером* k *заменить на столбец свободных членов системы (A1) — столбец из чисел* b_m.

Доказательство

Мы приводим доказательство для системы 2–го порядка. Отметим, что предлагаемое доказательство может быть почти буквально использовано для доказательства теоремы в случае системы произвольного порядка.

Из коэффициентов и правой части системы

$$\begin{cases} ax+by=e; \\ cx+dy=f; \end{cases} \qquad \text{(A2)}$$

составим определители: $\Delta=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$; $\Delta_x=\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}$; $\Delta_y=\begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}$.

Далее, рассмотрим определитель третьего порядка, составленный из коэффициентов системы (A2):

$K_1=\begin{vmatrix} a & b & e \\ a & b & e \\ c & d & f \end{vmatrix}$. Как известно, определитель у которого имеются одинаковые строки равен нулю. Мы используем этот факт и разложим определитель K_1 по первому столбцу:

$$a\begin{vmatrix} b & e \\ d & f \end{vmatrix}-b\begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}+e\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=0. \qquad \text{(A3)}$$

Поменяв местами столбцы первого определителя и используя обозначения, перепишем равенство (A3) в виде $-a\Delta_x-b\Delta_y+e\Delta=0$ $\Leftrightarrow$ $a\Delta_x/\Delta+b\Delta_y/\Delta=e$, и в результате увидим, что числа Δ_x/Δ и Δ_y/Δ являются решением первого уравнения системы (A2).

Теперь, рассмотрим определитель $K_2=\begin{vmatrix} c & d & f \\ a & b & e \\ c & d & f \end{vmatrix}$. Проделав то же самое, что было проделано с определителем K_1, получим, что числа Δ_x/Δ и Δ_y/Δ являются решением и второго уравнения системы (A2). Теорема доказана.

§9. МЕТОД КРАМЕРА –ГАУССА ДЛЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Известно, что метод Гаусса и правило Крамера являются наиболее популярными при решении систем линейных алгебраических уравнений. Однако в настоящее время распространено мнение, что правило Крамера устарело. Например, этот метод даже не описан во многих американских учебниках по математике. Мы можем понять сторонников такого подхода. Правило Крамера может использоваться только в том случае, если определитель системы не равен нулю. Кроме того, для решения системы из N уравнений с N неизвестными необходимо вычислить $N + 1$ определителей порядка N, что является сложной и довольно утомительной задачей, когда N равно трем или более. Поэтому, они предлагают использовать правило Крамера только в теоретических исследованиях.

По нашему мнению, мы не должны отказываться от правила Крамера. В этом параграфе рассматривается некоторая модификация этого метода, позволяющая сохранить его достоинства, избавляясь от присущих ему недостатков.

При решении систем по правилу Крамера соответствующие детерминанты вычисляются независимо. Однако мы можем использовать тот факт, что одни и те же миноры встречаются во всех этих детерминантах. Для этого будем вычислять определитель коэффициентов системы, используя разложение по первому столбцу. Кроме того, при нахождении неизвестных системы, мы будем использовать каждое найденное значение, для того чтобы уменьшить порядок системы и найти следующее значение. Этот подход типичен для метода Гаусса. В результате оказывается, что при решения системы будет достаточно вычислить только один определитель — определитель матрицы коэффициентов.

Мы назвали метод решения систем алгебраических уравнений, основанный на этих принципах, методом Крамера–Гаусса. Он достаточно прозрачен и прост. В связи с этим мы считаем, что его можно изучать даже в средней школе.

9.1. Задача

Карим имеет 60 банкнот достоинством пять, десять и двадцать долларов. При этом число двадцатидолларовых в четыре раза больше пятидолларовых. Найдите число банкнот каждого достоинства, зная, что у Карима всего $845.

Решение

Пусть x число пятидолларовых, y — десятидолларовых, z — двадцатидолларовых банкнот. Тогда имеет место система

$$\begin{cases} x + y + z = 60; \\ z = 4x; \\ 5x + 10y + 20z = 845; \end{cases}$$

которую можно записать в стандартном виде

$$\begin{cases} x + y + z = 60; \\ 4x - z = 0; \\ 5x + 10y + 20z = 845. \end{cases} \tag{9.1}$$

Вычислим определитель матрицы коэффициентов, используя разложение по первому столбцу:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \\ 5 & 10 & 20 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 10 & 20 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 10 & 20 \end{vmatrix} + 20\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} =$$

$= 1[0·20 – 10·(–1)] – 4[1·20 – 10·1] + 5[1·(–1) – 0·1] =$
$=1·10 – 4·10 + 5·(–1) = –35.$

Заменив элементы первого столбца числами из правой части системы, получим

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 60 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 845 & 10 & 20 \end{vmatrix} = 60\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 10 & 20 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 10 & 20 \end{vmatrix} + 845\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$$. Отметим,

что все определители второго порядка вычислены при нахождении значения Δ. Поэтому, $\Delta_x = 60·10 – 0·10 + 845·(–1) =$ $= –245$. Отсюда, по правилу Крамера, $x = \Delta_x/\Delta = –245/(–35) = 7$. Далее, следуя правилу Крамера, можно вычислять Δ_y , Δ_z , ...

Однако, здравый смысл подсказывает более легкий путь. Используя значение $x = 7$, из второго уравнения системы (9.1), найдем z: $z = 4x = 28$. После этого, из первого уравнения $x + y + z = 60$, получим $y = 60 – 7 – 28 = 25$. Итак, мы определили, что Карим имеет 7 пятидолларовых, *25* десятидолларовых и *28* двадцатидолларовых банкнот

Метод, использованный при решении этой задачи мы называем методом Крамера–Гаусса.

Упражнение 9.1. Решить системы:

С. $\begin{cases} 17x - 11y = 161; \\ 7x + 13y - 9z = 54; \\ 22x - 19y + 5z = 250. \end{cases}$ **Н.** $\begin{cases} 7x - 11y + 8z = -12; \\ 9x + 10y - 13z = 220; \\ 8x + 13y = 127. \end{cases}$

9.2. Задача

Решить систему

$$\begin{cases} 521x + 3227y = 4301; \\ 267x + 741y = 3351. \end{cases} \qquad (9.2)$$

Конечно, можно сразу начать решать эту систему, но для учащихся будет и интереснее, и полезнее получить эту систему в виде задачи, для решения которой используется система (9.2):

Магазин торгует шоколадными конфетами и карамелью. В 1–й день, когда было продано 521 кг шоколадных конфет и 327 кг карамели, выручка составила $4301.
Во 2–й день, когда было продано 267 кг шоколадных конфет и закуплено 741 кг карамели, выручка составила $3351. Определите цены товаров.

Решение

Определитель системы (9.2) $\Delta = \begin{vmatrix} 521 & 327 \\ 267 & 741 \end{vmatrix} = 521 \cdot 741 - 267 \cdot 327 =$ $= -441770$. Для того чтобы найти x, коэффициенты при x заменим на свободные члены и вычислим Δ_x: $\Delta_x = 4301 \cdot 741 - 3351 \cdot 327 =$ -3092390. Тогда, по формуле Крамера
$x = \Delta_x / \Delta = -3092390/(-441770) = 7$.

Далее, следуя методу ***KG,*** исключаем одно из уравнений системы (9.2) (рекомендуется более сложное, в данном случае уравнения равнозначны — тогда любое. Пусть это будет второе.) Подставив найденное на первом шаге значение $x = 7$ в первое уравнение получим $521 \cdot 7 + 327y = 4301$.

Отсюда, $327y = 4301 - 3647 = 654$ и $y = 2$.

Упражнение 9.2.

С. Саадат торгует конфетами и печеньем. В первый день она продала 17 килограмм конфет и 22,5 кг печенья. Во второй день она продала 25,2 кг конфет и 19 кг печенья. Определите цены конфет и печенья, зная, что выручка в первый день оказалась равной 9210 сомов, во второй день — равной 10868 сомов.

H. Диана вложила put 80 000 сомов на два депозита и спустя год получила 88190 сомов. Ставка интереса на первом депозите 9%, на втором — 12%. Сколько денег было положено на каждый депозит?

9.3. Задача

Кондитерская торгует тортами. В воскресенье, когда были проданы 25 маленьких, 15 средних и 10 больших тортов, выручка составила $1035. В понедельник, когда были проданы 16 маленьких, 10 средних и 4 больших торта, выручка составила $600. Во вторник, когда были проданы 19 маленьких, 11 средних и 7 больших тортов, выручка составила $759. Определите цену каждого вида тортов.

Решение

Пусть x — цена маленького, y — среднего, z — большого торта. Начнем с вычисления определителя матрицы коэффициентов системы

$$\begin{cases} 25x + 15y + 10z = 1035, \\ 16x + 10y + 4z = 600, \\ 19x + 11y + 7z = 759, \end{cases} \qquad (9.3)$$

используя разложение по первому столбцу:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 25 & 15 & 10 \\ 16 & 10 & 4 \\ 19 & 11 & 7 \end{vmatrix} = 25\begin{vmatrix} 10 & 4 \\ 11 & 7 \end{vmatrix} - 16\begin{vmatrix} 15 & 10 \\ 11 & 7 \end{vmatrix} + 19\begin{vmatrix} 15 & 10 \\ 10 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= 25(10\cdot7 - 11\cdot4) - 16(15\cdot7 - 11\cdot10) + 19(15\cdot4 - 10\cdot10) =$$
$$=25\cdot26 - 16\cdot(-5) + 19\cdot(-40) = -30.$$

Заменив элементы первого столбца числами из правой части системы, получим $\Delta_x = \begin{vmatrix} 1035 & 15 & 10 \\ 600 & 10 & 4 \\ 759 & 11 & 7 \end{vmatrix}$. Как обычно, используем разложение пр первому столбцу, для того чтобы воспользоваться уже вычисленными значениями миноров:

$\Delta_x = 1035\cdot26 - 600\cdot(-5) + 759\cdot(-40) = = -450.$

Тогда, по правилу Крамера $x = \Delta_x/\Delta = -450/(-30) = 15$.
Теперь, подставив $x = 15$, из первого и второго уравнения системы (9.3):

$$\begin{cases} 15y + 10z = 1035 - 25 \cdot 15; \\ 10y + 4z = 600 - 16 \cdot 15; \end{cases} <=> \begin{cases} 15y + 10z = 660; \\ 10y + 4z = 360. \end{cases}$$

Определитель коэффициентов этой системы уже был вычислен: $\Delta_1 = 15 \cdot 4 - 10 \cdot 10 = -40$. Так как $\Delta_y = 660 \cdot 4 - 360 \cdot 10 = -960$, получаем, $y = -960/(-40) = 24$. Далее, так как $y = 24$, из уравнения $15y + 10z = 660$ получим $10z = 660 - 15 \cdot 24 = 300$.

Таким образом выяснилось, что маленький торт стоил \$15, средний — \$24, большой — \$30. Стоит заметить, что процесс решения задачи будет проще, если использовать еще один элемент метода Гаусса — будет получен ноль во втором или третьем столбце матрицы коэффициентов системы. Продемонстрируем это.

Разделив первое уравнение системы (9.3) на 5, второе на 2:

$$\begin{cases} 5x + 3y + 2z = 207, \\ 8x + 5y + 2z = 300, \\ 19x + 11y + 7z = 759, \end{cases}$$

и вычислив разность результатов, получим систему:

$$\begin{cases} 5x + 3y + 2z = 207, \\ 3x + 2y + 0 \cdot z = 93, \\ 19x + 11y + 7z = 759, \end{cases} \qquad (9.4)$$

Определитель коэффициентов системы (9.4):

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \\ 19 & 11 & 7 \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 11 & 7 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 11 & 7 \end{vmatrix} + 19\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} =$$

$= 5(2 \cdot 7 - 11 \cdot 0) - 3(3 \cdot 7 - 11 \cdot 2) + 19(3 \cdot 0 - 2 \cdot 2) = -3$.

Заменив элементы первого столбца числами из правой части системы, получим $\Delta_x = 207 \cdot 14 - 93 \cdot (-1) + 759 \cdot (-4) = -45$. Тогда, $x = \Delta_x/\Delta = -45/(-3) = 15$. Теперь, из второго уравнения системы (9.4) при $x = 15$: $3 \cdot 15 + 2y = 93$. Отсюда, $2y = 48 \Rightarrow y = 24$. Затем, используя найденные значения, из уравнения

$5x + 3y + 2z = 207$, получим $z = (207 - 5\cdot 15 - 3\cdot 24)/2 = 30.$

Упражнение 9.3.

С. Мастерская производит 3 вида люстр. Для производства люстры 1–го вида требуются 2 часа на сборке, 0,1 час на контроль качества и 0,5 часов на упаковке. Соответствующие данные для люстры 2–го вида: 2,5 часа, 0,2 часа и 1 час; для люстры 3–го вида: 3 часа, 0,2 часа и 0,75 часов. Сколько люстр каждого вида было произведено, если на сборку было потрачено 570 часов, на контроль качества 40 часов, на упаковку 180 часов?

Н. Три фермера решили продавать товары по одним и тем же ценам. Какими должны быть цены на мясо, морковь и картофель, для того чтобы покрыть все затраты, если 1–й фермер произвел 2 тонны мяса, 30 тонн моркови и 20 тонн картофеля, затратив $15 000; 2–й фермер: 1; 10; 50; $12500; 3–й фермер: 2; 25; 30; $15500, соответственно?

9.4. Задача

Знаменитый обжора Робин Бобин Барабек объелся пирожными. Потом было подсчитано, что он употребил 1296 единиц углеводов, 1235 — белков и 1286 – жиров. Сколько пирожных каждого вида он съел, если пирожное А содержит 37 единиц углеводов, 29 – белков и 13 — жиров, пирожное В содержит 40 единицы углеводов, 40 – белков и 32 – жиров, пирожное С содержит 17 единиц углеводов, 20 – белков и 13 – жиров?

Решение

Введя соответствующие обозначения, получим систему

$$\begin{cases} 37a + 40b + 17c = 1296, \\ 25a + 40b + 20c = 1235, \\ 32a + 32b + 13c = 1086. \end{cases} \qquad (9.5)$$

Решение системы начнем с промежуточного шага: нужно обнулить один из коэффициентов при b или c. Для системы (9.5) самый простой вариант — вычесть из 1–го уравнения 2–ое, а затем разделить 2–ое уравнение на 5: $\begin{cases} 12a - 3c = 61, \\ 5a + 8b + 4c = 247, \\ 32a + 32b + 13c = 1086. \end{cases}$

Определитель Δ матрицы коэффициентов полученной системы: $\Delta = \begin{vmatrix} 12 & 0 & -3 \\ 5 & 8 & 4 \\ 32 & 32 & 13 \end{vmatrix} = 12\begin{vmatrix} 8 & 4 \\ 32 & 13 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 32 & 13 \end{vmatrix} + 32\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} =$

$= 12\cdot(-24) - 5\cdot 96 + 32\cdot 24 = 0.$

Заменим первый столбец матрицы коэффициентов на правую часть системы, и подсчитаем определитель Δ_a, опять же используя разложение по первому столбцу.

Как обычно, воспользуемся тем, что все определители 2–го порядка, необходимые для вычисления Δ_a, уже известны: $\Delta_a = 61\cdot(-24) - 247\cdot 96 + 1086\cdot 24 = 888.$ Так как Δ_a не равен нулю и $\Delta = 0$, система не имеет решения. Это означает, что в условиях задачи имеется ошибка.

Упражнение 9.4.

С. Согласно данным Ислома, в первый день он продал 8 килограмм конфет, 5 кг печенья, 7 кг муки и выручил 3101 сомов. Во второй день, соответствующие данные: 2 кг; 7 кг; 9 кг; 2187 сомов. В третий день: 14 кг; 3 кг; 5 кг; 4017 сомов. Определите цены этих товаров.

Н. Решите систему: $\begin{cases} 17x - 11y + 32z = 10, \\ 21x + 5y + 51z = 14, \\ 13x - 27y + 13z = 5. \end{cases}$

9.5. Задача

Говорят, что ученики Габриэля Крамера (31 июля 1704 г. — 4 января 1752 г.), узнав о новом методе решения систем линейных алгебраических уравнений, написали письмо Карлу Фридриху Гауссу (30 апреля 1777 г. — 23 февраля 1855 г.). В этом письме они пригласили его приехать в Швейцарию вместе с коллегами, чтобы обсудить достоинства его метода в приятной обстановке. В ответ Гаусс написал, что с удовольствием приедет. В их небольшой делегации будет x женщин, y детей, z мужчин. Значения неизвестных можно будет узнать, решив систему

$$\begin{cases} 15x - 18y - 14z = -63, \\ 25x + 27y - 17z = 104, \\ 175x + 18y - 138z = 101. \end{cases} \tag{9.6}$$

Прибыв в назначенное время, Гаусс и его коллеги были приятно удивлены тем, что желаемое количество мест для проживания было подготовлено.

Позже выяснилось, что сначала эту систему было предложено решить профессору Ортодокскрамеру. Он вычислил определитель матрицы коэффициентов:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 15 & -18 & -14 \\ 25 & 27 & -17 \\ 175 & 18 & -138 \end{vmatrix} = 15\begin{vmatrix} 27 & -17 \\ 18 & -138 \end{vmatrix} - 25\begin{vmatrix} -18 & -14 \\ 18 & -138 \end{vmatrix} + 175\begin{vmatrix} -18 & -14 \\ 27 & -17 \end{vmatrix} =$$

$= 15\cdot(-3420) - 25\cdot 2736 + 175\cdot 684 = 0,$ и сказал, что количество гостей определить невозможно, потому что определитель равен нулю.

После этого был организован научный семинар, где совместными усилиями была исследована система (9.6). Поскольку первое и третье уравнения системы (9.6) имели член $18y$, для упрощения системы, к третьему уравнению добавили первое, а результат был разделен на 38. Получилась система

$$\begin{cases} 15x - 18y - 14z = -63, \\ 25x + 27y - 17z = 104, \\ 5x - 4z = 1. \end{cases} \tag{9.7}$$

Конечно, определитель Δ матрицы коэффициентов системы (9.7) также равен нулю:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 15 & -18 & -14 \\ 25 & 27 & -17 \\ 5 & 0 & -4 \end{vmatrix} = 15\begin{vmatrix} 27 & -17 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} - 25\begin{vmatrix} -18 & -14 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} -18 & -14 \\ 27 & -17 \end{vmatrix} =$$

$= 15\cdot(-108) - 25\cdot 72 + 5\cdot 684 = 0.$ Затем, после долгих дебатов, кто–то вспомнил, что сам Крамер записывал формулу $x = \Delta_x/\Delta$ в виде $x\cdot\Delta = \Delta_x$. Это был решающий момент. Вычислив определитель Δ_x:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -63 & -18 & -14 \\ 104 & 27 & -17 \\ 1 & 0 & -4 \end{vmatrix} = -63\cdot(-108) - 104\cdot 72 + 1\cdot 684 = 0,$$

они увидели, что неизвестная x может быть любым числом. Далее, подставив $x = p$, в 3–е уравнение системы (9.7), они получили $z = (5p - 1)/4$. После этого, из первого уравнения: $y = (-5p + 133)/36$. Таким образом выяснилось, что система (9.7) имеет решение $x = p$; $y = (-5p + 133)/36$; $z = (5p - 1)/4)$, где p может быть любым числом. Далее, для определения неизвестных были использованы их неотрицательность и целочисленность: $(p \geq 0;\ (-5p + 133)/36 \geq 0;\ (5p-1)/4 \geq 0) \Rightarrow (p \geq 0;\ 26{,}6 \geq p;\ p \geq 0{,}25) \Rightarrow p = 1, 2, \ldots 26.$ Затем, из целочисленности переменной $z = (5p - 1)/4$, получили $p = 1;\ 5;\ 9;\ 13;\ 17;\ 21;\ 25$. Наконец, так как $y = (-5p + 133)/36$, получили, что p может быть только равным 5. Итак, $x=5$; $y=(-5\cdot5+133)/36=3$; $z=(5\cdot5-1)/4=6$.
"Таким образом мы определили, что должны приехать пять женщин, три ребенка и шесть мужчин" — закончили хозяева.

Упражнение 9.5. Решите системы:

C. $\begin{cases} 7x - 3y + 3z = 10, \\ 11x + 5y + 21z = 14, \\ 38x - 26y = 56. \end{cases}$ **H.** $\begin{cases} 17x - 11y + 2z = 10, \\ 23x + 11y + 51z = 14, \\ 40x + 53z = 24. \end{cases}$

9.6. Задача

Исследовать на разрешимость систему $\begin{cases} 2x + 3y + (1 + a)z = 2, \\ ax + 5y + 4z = 3, \\ 7x + 2y - 2z = 2. \end{cases}$

Решение

Можно использовать разные методы. Давайте воспользуемся методом Крамера–Гаусса.
Начнем с вычисления определителей Δ и Δ_x:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1+a \\ a & 5 & 4 \\ 7 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} - a\begin{vmatrix} 3 & 1+a \\ 2 & -2 \end{vmatrix} + 7\begin{vmatrix} 3 & 1+a \\ 5 & 4 \end{vmatrix} =$$

$=2(–18) – a(–8 – 2a) + 7(7 – 5a) = 2a^2 – 27a + 13;$

$\Delta_x = 2(–18) – 3(–8 – 2a) + 2(7 – 5a) = –4a + 2.$

Решим соответствующие уравнения:

$\Delta = 0 \Leftrightarrow 2a^2 – 27a + 13 = 0 => a = 0{,}5$ или $a = 13;$

$\Delta_x = 0 \Leftrightarrow –4a + 2 = 0 => a = 0{,}5.$

Итак,

– система имеет единственное решение, когда $\Delta \neq 0$, то есть, когда $a \neq 0{,}5$ или $a \neq 13;$

– система не имеет решений, когда $\Delta = 0$ и Δ_x отлично от нуля, то есть, когда $a = 13;$

– система имеет бесконечно много решений, когда $\Delta = 0$ и $\Delta_x = 0$, то есть, когда $a = 0{,}5$.

Упражнение 9.6. Исследовать на разрешимость систему

C. $\begin{cases} x - ay + z = 1, \\ ax - y + z = a, \\ x + y - z = 0. \end{cases}$ **Н.** $\begin{cases} x + y - z = 2, \\ x + 2y + z = 3, \\ x + y + (a^2 - 5)z = a. \end{cases}$

9.7. Задача

Волк встретил Красную Шапочку в точке с координатами (1, –1), а затем они по–разному добрались до дома бабушки, который расположен в точке с координатами (4, 14). Маршруты, по которым двигались Волк и Красная Шапочка, были частями соответствующих парабол.

Определите вторую координату дома, в котором живет Красная Шапочка, зная, что первая координата равна –2 и что она прошла через точку с координатами (3, 5).

Определите координаты точки, в которой находился Волк, когда Красная Шапочка прошла через точку с координатами (3, 5), зная, что он вышел из своего дома, расположенного в точке с координатами (–3, 21).

Решение

Чтобы написать уравнение движения Красной Шапочки, необходимо знать, что парабола задается квадратичной функцией вида $y = ax^2 + bx + c$. Коэффициенты этой функции можно определить, поскольку есть координаты трех точек, которые посетила Красная Шапочка. Итак, подставив в функцию $y = ax^2 + bx + c$ координаты точек (1, –1), (4, 14) и (3, 5), получаем систему:

$$\begin{cases} a\cdot 1^2 + b\cdot 1 + c = -1, \\ a\cdot 3^2 + b\cdot 3 + c = 5, \\ a\cdot 4^2 + b\cdot 4 + c = 14, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\cdot 1 + b\cdot 1 + c = -1, \\ a\cdot 9 + b\cdot 3 + c = 5, \\ a\cdot 16 + b\cdot 4 + c = 14. \end{cases}$$

Вычислим определители Δ_x и Δ_a полученной системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \\ 16 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 1(-1) - 9(-3\ ) + 16(-2) = -6\ ;$$

$\Delta_a = -1(-1) - 5(-3\ ) + 14(-2) = -12.$ Поэтому, $a = (-12)/(-6) = 2.$ Подставляя $a = 2$ в первое и второе уравнения системы, получим систему меньшего порядка: $\begin{cases} b\cdot 1 + c = -3; \\ b\cdot 3 + c = -13. \end{cases}$

Решение этой системы $b = -5;\quad c = 2.$

Итак, выяснилось, что движение Красной Шапочки описывается функцией $y = 2x^2 - 5x + 2.$ Следовательно, вторая координата ее дома: $y = 2(-2)^2 - 5(-2) + 2 = 20.$

Используя точки $(1, -1)$, $(4, 14)$ и $(-3, -21)$, получим систему, которая позволит получить соответствующую функцию для Волка:

$$\begin{cases} a\cdot 1^2 + b\cdot 1 + c = -1, \\ a\cdot (-3)^2 + b\cdot (-3) + c = -21, \\ a\cdot 4^2 + b\cdot 4 + c = 14, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\cdot 1 + b\cdot 1 + c = -1, \\ a\cdot 9 - b\cdot 3 + c = -21, \\ a\cdot 16 + b\cdot 4 + c = 14. \end{cases}$$

Решим и эту систему методом Крамера–Гаусса:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 9 & -3 & 1 \\ 16 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 1(7) - 9(-3\ ) + 16(4) = 84;$$

$\Delta_a = -1(-7) - (-21)(-3\ ) + 14(4) = 0.$ Поэтому, $a = 0/84 = 0$. Подставляя $a = 0$ в первое и второе уравнения системы, получим систему второго порядка: $\begin{cases} b \cdot 1 + c = -1; \\ b \cdot 3 + c = -21. \end{cases}$ Отсюда, $b = 5;\ c = -6$.

Выяснилось, что Волк двигался по прямой линии, описываемой линейной функцией $y = 5x - 6$. Так как расстояние по прямой является кратчайшим, становится понятно, почему Волк оказался у бабушки раньше, чем Красная Шапочка. Так как Волк двигался по прямой $y = 5x - 6$, равенство $5 \cdot 3 - 6 = 9$ позволяет определить, что, в тот момент, когда Красная Шапочка находилась в точке $(3,5)$, Волк был в точке с координатами $(3, 9)$.

Упражнение 9.7

С. Напишите уравнение параболы проходящей через точки $(-3, 0), (-1, -4)$ и $(2, 25)$.

Н. Напишите уравнение параболы проходящей через точки $(-1, 6), (2, 9)$ и $(3, 26)$.

Итоговые упражнения

1. Пекарня А продает 50% своей продукции в Бишкеке, 20% в Канте, 30% в Токмаке. Соответствующие данные по пекарне В: 40%, 40%, 20%; по пекарне С: 30%, 40%, 30%. Сколько тонн произведено на каждом заводе, если в Бишкеке получили 219 тонн, в Канте 192 т, в Токмаке 144 т?

2. Магазин продает три вида кондитерских изделий. Первый содержит 0,3 части карамели, 0,3 части ирисок и 0,4 части шоколадных конфет. Второй вид содержит 0,2; 0,3; 0,5 части, третий: 0,5; 0,4; 0,1 части, соответственно. Сколько однокилограммовых пакетов каждой смеси в магазине, если известно, что там 28 кг карамели, 28,2 кг ирисок, 31,8 кг шоколадных конфет?

3. Три грузовика привезли муку на склад в мешках трех типов. В первой машине было 10 мешков 1–го типа, 7 мешков 2–го и 11 третьего, в них было всего 1 570 кг муки; во второй машине: 12, 8, 5 мешков и 1 290 кг; в третьей: 10, 5, 10 мешков и 1 400 кг. Сколько весил мешок каждого типа?

4. Сдавая склады, кладовщик Агюров указал, что на первом складе присутствуют 30 маленьких, 15 средних и 20 больших мешков с сахаром. Всего 2850 кг. Соответствующие данные по второму складу: 18; 22; 11; 2300 кг; по третьему складу: 42; 8; 29; 3100 кг. Изучив эти данные, а также, обратив внимание на фамилию кладовщика, Шерлок Холмс, знакомый с теорией линейных уравнений, установил, что имеет место несоответствие данных. Как он это узнал?

В результате дополнительного расследования было установлено, что на третьем складе из мешков был похищен сахар, а вес маленького мешка должен быть 30 кг. Определите, сколько сахара было украдено.

5. Компания Гамма производит три типа ламп с маркировкой P, R и Q. Каждая лампа обрабатывается в двух цехах, I и II. Требуемое время и прибыль на единицу для каждого типа лампы, следующие:

	P	R	Q
Человеко–часы в I	2,1	2,9	1,2
Человеко–часы в II	3,9	2,2	3
Прибыль	$5	$4,1	$3,4

Сколько ламп каждого типа было произведено, если компания потратила 441 человеко–часов в I цехе, 567 человеко–часов во II цехе и получила 822 доллара прибыли?

6. Фирма Тэта производит товары E, F и G. Каждый товар проходит через три цеха, в которых на каждую единицу товара тратится время, согласно таблице:

	E	F	G
Сборка	19	31	20
Окраска	11	18	23
Наладка	21	33	9

Сколько единиц товара каждого вида было произведено, если было затрачено 7570 человеко–часов на сборке, 5190 на окраске и 7260 человеко–часов для наладки?

7–11. Решить системы:

7. $\begin{cases} x + y + 3z = 10, \\ 2x + y + z = 14, \\ 3x + y - z = 19. \end{cases}$ **8**. $\begin{cases} 2x - 3y + 7z = 28, \\ 3x + 5y - 10z = -29, \\ 7x - 3z = 5. \end{cases}$ **9.** $\begin{cases} 3x + 2y + 4z = 23, \\ 2x + y + z = 14, \\ 5x + 2y = 33. \end{cases}$

10. $\begin{cases} 317x + 4y - 7z = -21, \\ 511x - 3y + 11z = 1542, \\ -263x - 7y + 5z = 584. \end{cases}$ **11**. $\begin{cases} 86x - 3y + 11z = 20, \\ 149x - 17z = 583, \\ -371x + 7y + 6z = -811. \end{cases}$

12. Исследовать систему на разрешимость $\begin{cases} ax - z = a + 1, \\ ay - 3z = a + 3, \\ 4x - az = 4 + a. \end{cases}$

13. Напишите уравнение параболы, проходящей через точки *(–2, –15), (1, 0)* и *(4, 39).*

14. Стоит сказать, что Вы уже обладаете всеми необходимыми знаниями, чтобы суметь использовать язык математики для анализа сложившейся ситуации в истории про султана из Введения. Попробуйте. После этого можете сравнить Ваше решение с решением приведенным в конце книги, в приложениях.

§10. МАТРИЦЫ. ОПЕРАЦИИ С МАТРИЦАМИ.

Великий среднеазиатский поэт Саади говорил: «Кто учился наукам и не применяет их, похож на того, кто пахал, но не сеет». Скорее всего, в таких ситуациях дело в том, что соответствующего человека научили только пахать. И в то же время ему не показали, как нужно сеять. К очень большому сожаленью, эта ситуация часто имеет место в процессе обучения математике в общем, и при обучении будущих экономистов, в частности. В этом параграфе мы пытаемся показать, что понятие матрицы возникает естественным образом и использование матриц существенным образом помогает при анализе экономических ситуаций.

10.1. Задача

Корпорация имеет два предприятия, которые производят три вида товаров. В первом полугодии первое предприятие произвело 17000 единиц товара I, 3000 единиц товара II и 11000 единиц товара III.

Во втором полугодии то же предприятие произвело 19000 единиц товара I, 5000 единиц товара II и 8000 единиц товара III. Второе предприятие в первой половине года произвело 15000 единиц товара I, 18000 единиц товара II и 2000 единиц товара III. Соответствующие данные за второе полугодие: 15000; 15000; 6000.

Если информация будет представлена в вышеприведенном виде, это требует много времени и места, и с ней трудно работать. Гораздо удобнее представлять данные в виде прямоугольной таблицы. Например, деятельность предприятий в первом полугодии, в тысячах единиц:

	Товар I	Товар II	Товар III
Предприятие 1	17	3	11
Предприятие 2	15	18	2

Соответствующие данные для второго полугодия:

	Товар I	Товар II	Товар III
Предприятие 1	19	5	8
Предприятие 2	15	15	6

В табличном виде также удобно вводить рыночные цены ($/единица товара):

	1–ое полугодие	2–ое полугодие
Товар I	8	7,5
Товар II	17	18
Товар III	23	26

и затраты на производство товаров (в тысячах $):

	1–ое полугодие	2–ое полугодие
Предприятие 1	350	400
Предприятие 2	380	440

Добавляя 17 из верхнего левого угла первой таблицы к 19 из того же места второй таблицы, мы находим, что первое предприятие произвело 36 тысяч единиц товара I в течение года. Чтобы получить все данные за год, мы должны сложить оставшиеся числа. Поэтому будет гораздо удобнее, если таблицы будут стоять рядом. Эти соображения приводят нас к введению понятия матрицы и операций над матрицами.

Определение

Числовая матрица представляет собой прямоугольную таблицу, составленную из чисел. Она имеет размеры: количество строк и количество столбцов, и элементы — числа в таблице.

Например, отчет о производстве первого предприятия в первой половине года может быть представлен в виде (2х3) матрицы — матрицы с двумя строками и тремя столбцами: $\begin{pmatrix} 17 & 3 & 11 \\ 15 & 18 & 2 \end{pmatrix}$. Как правило, матрицы обозначаются заглавными буквами. Элементы матрицы обозначаются строчными буквами с двумя индексами, где первый индекс указывает на номер строки, а второй индекс — номер столбца.

Записав таблицу приведенную выше в виде $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$ или, короче, $A = \left(a_{i\,j}\right)$, мы можем говорить, что i–тое предприятие произвело $a_{i\,j}$ тысяч единиц товара вида j.

Цены будут записаны в виде матрицы P порядка (3х2): $P = \begin{pmatrix} 8 & 7{,}5 \\ 17 & 18 \\ 23 & 26 \end{pmatrix}$.

В тех случаях, когда число строк n равно числу столбцов, говорят о квадратной матрице порядка n. Так, матрица затрат является матрицей второго порядка: $C = \begin{pmatrix} 350 & 400 \\ 380 & 440 \end{pmatrix}$.

Очень часто матрицу, имеющую только одну строку или только один столбец, называют вектором.

Например, цены первого полугодия образуют матрицу $P1 = \begin{pmatrix} 8 \\ 17 \\ 23 \end{pmatrix}$. Ее составляют элементы 1–го столбца матрицы *P*.

Используем вышесказанное, и обозначив результаты второго полугодия, из второй таблицы, через В, мы можем записать итоги года в виде матрицы $A + B$:

$$A = \begin{pmatrix} 17 & 3 & 11 \\ 15 & 18 & 2 \end{pmatrix};\ B = \begin{pmatrix} 19 & 5 & 8 \\ 15 & 15 & 6 \end{pmatrix};\ A + B = \begin{pmatrix} 36 & 8 & 19 \\ 30 & 33 & 8 \end{pmatrix}.$$

Правила сложения и вычитания матриц

a) сложение и вычитание определено только для матриц одинакового размера;

b) элементы матрицы, которая является суммой двух матриц, являются суммами соответствующих элементов этих матриц. Другими словами, если $Z = X + Y$, то $z_{i\,j} = x_{i\,j} + y_{i\,j}$.

c) элементы матрицы, которая является разностью двух матриц, представляют собой разность соответствующих элементов этих матриц: если $Z = X – Y$, то $z_{i\,j} = x_{i\,j} - y_{i\,j}$.

Вычислив разность

$$B - A = \begin{pmatrix} 19 & 5 & 8 \\ 15 & 15 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 17 & 3 & 11 \\ 15 & 18 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix},$$

мы увидим, что первое предприятие во втором полугодии увеличило выпуск товаров 1 и 2 на две тысячи единиц и уменьшило выпуск товара 3 на три тысячи единиц и так далее.

Для того чтобы узнать прибыль предприятий можно найти разность между матрицей валового выпуска *N* (о ней чуть позже) и матрицей затрат *C*:

$$N - C = \begin{pmatrix} 343 & 440{,}5 \\ 472 & 538{,}5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 350 & 400 \\ 380 & 440 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 40{,}5 \\ 92 & 98{,}5 \end{pmatrix}.$$

Полученная матрица показывает, что первое предприятие в первом полугодии было убыточным, во втором полугодии ситуация существенно улучшилась. Второе предприятие работало стабильно и хорошо.

Предположим, что руководство корпорации планирует увеличить производство всех трех видов товара в будущем году на 10%. Для того чтобы получить матрицу ожидаемых результатов мы должны умножить каждый элемент матрицы $A + B$ на $1,1$. Конечно, мы обозначим результат $1,1(A + B)$:

$$1,1(A + B) = \begin{pmatrix} 39,6 & 8,8 & 20,9 \\ 33 & 36,3 & 8,8 \end{pmatrix}.$$

Итак, **правило для умножения числа и матрицы**: чтобы умножить матрицу на число, мы должны умножить каждый элемент матрицы на это число.

Задача

Пусть $X = \begin{pmatrix} 12 & -2 \\ 2 & -15 \\ 17 & 21 \end{pmatrix}$; $Y = \begin{pmatrix} 7 & 12 & 17 \\ 2 & -5 & -2 \end{pmatrix}$; $Z = \begin{pmatrix} 70 & -2 & 9 \\ 23 & 51 & 4 \end{pmatrix}$.

Найти: $X + Y$; $X - 5Y$; $X + 0,5Z$; $2X - Z$; $Y + Z$; $9X$; $-0,5Y$; $Y - Z$; $3Z - 2Y$.

Решение

$X + Y$; $X - 5Y$; $X + 0,5Z$; $2X - Z$ не определены, потому что матрицы имеют разный размер;

$$Y + Z = \begin{pmatrix} 77 & 10 & 26 \\ 25 & 46 & 2 \end{pmatrix}; \quad 9X = \begin{pmatrix} 108 & -18 \\ 18 & -135 \\ 153 & 189 \end{pmatrix};$$

$$-0,5Y = \begin{pmatrix} -3,5 & -6 & -8,5 \\ -1 & 2,5 & 1 \end{pmatrix}; \quad Y - Z = \begin{pmatrix} -63 & 14 & 8 \\ -21 & -56 & -6 \end{pmatrix};$$

$$3Z - 2Y = \begin{pmatrix} 210 & -6 & 27 \\ 69 & 153 & 12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 14 & 24 & 34 \\ 4 & -10 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 196 & -30 & -7 \\ 65 & 163 & 16 \end{pmatrix}.$$

Упражнение 10.1.

С. Пусть $S = \begin{pmatrix} 9 & 21 & 15 \\ 22 & -7 & 11 \\ 7 & 2,3 & -4 \end{pmatrix}$; $T = \begin{pmatrix} 8 & 2,1 & -8 \\ -6 & 1 & 14 \\ 6 & 18 & -2 \end{pmatrix}$; $R = \begin{pmatrix} 12 & -2 \\ 2 & 5 \\ -17 & 1 \end{pmatrix}$.

Вычислить: $S + T$; $S + R$; $T - R$; $T - S$; $0,2R$; $-7T$; $3S - 5T$

Н. Пусть $K = \begin{pmatrix} 21 & -2 \\ 2 & -5 \\ -1,7 & 10 \end{pmatrix}$; $L = \begin{pmatrix} 8 & 2,1 & -8 \\ -6 & 1 & 14 \\ 6 & 18 & -2 \end{pmatrix}$; $M = \begin{pmatrix} 2 & -2,7 \\ 32 & -5 \\ 1,7 & 1 \end{pmatrix}$.

Вычислить:

$K + L$; $L + M$; $K + M$; $L - M$; $K - M$; $4M$; $1,1L$; $3K - 2,5M$.

10.2. Правило умножения матрицы на другую матрицу

Правило умножения матрицы на другую матрицу сложнее. Давайте начнем с наводящих соображений.

Обычно удобнее представлять выпуск продукции не в единицах, метрах или тоннах, а в денежном выражении. Поэтому нам нужно знать цену каждого товара. Чтобы найти стоимость товаров, произведенных предприятием, мы должны умножить объемы производства каждого товара на цену за единицу этого товара, а затем сложить эти произведения.

Давайте выразим деятельность компании в первом полугодии в деньгах:

$$A \cdot P1 = \begin{pmatrix} 17 & 3 & 11 \\ 15 & 18 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 17 \\ 23 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \cdot 8 + 3 \cdot 17 + 11 \cdot 23 \\ 15 \cdot 8 + 18 \cdot 17 + 2 \cdot 23 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 343 \\ 472 \end{pmatrix}$$

(Напомним, что матрица *P1* выражет цены первого полугодия.)

Также, выразим деятельность корпорации во втором полугодии:

$$B \cdot P2 = \begin{pmatrix} 19 & 5 & 8 \\ 15 & 15 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7,5 \\ 18 \\ 26 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 \cdot 7,5 + 5 \cdot 18 + 8 \cdot 26 \\ 15 \cdot 7,5 + 15 \cdot 18 + 6 \cdot 26 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 440,5 \\ 538,5 \end{pmatrix},$$

Объединим полученные матрицы–столбцы и получим матрицу валового выпуска *N*: $N = \begin{pmatrix} 343 & 440,5 \\ 472 & 538,5 \end{pmatrix}$, которая использовалась ранее.

Поскольку цены со временем меняются, для анализа экономической ситуации экономисты используют понятия номинальной и реальной стоимости товаров.

Реальная стоимость — это стоимость товаров в ценах определенного периода, выбранного в качестве базового периода. Номинальная стоимость — это стоимость товара в текущих ценах.

Например, если цены растут, а объем производства не меняется, номинальная стоимость товаров, производимых предприятием, растет, а реальная стоимость остается неизменной. Если мы рассчитаем стоимость товаров, произведенных компанией в ценах разных периодов времени, и запишем результаты в виде матрицы, то сможем получить объективную картину деятельности предприятия.

Например, произведение матрицы B, отражающей деятельность первого и второго предприятия во второй половине года, и матрицы P, выражающей цены в первой и второй половине года, составляет:

$$B \cdot P = \begin{pmatrix} 19 & 5 & 8 \\ 15 & 15 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 7{,}5 \\ 17 & 18 \\ 23 & 26 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 19 \cdot 8 + 5 \cdot 17 + 8 \cdot 23 & 19 \cdot 7{,}5 + 5 \cdot 18 + 8 \cdot 26 \\ 15 \cdot 8 + 15 \cdot 17 + 6 \cdot 23 & 15 \cdot 7{,}5 + 15 \cdot 18 + 6 \cdot 26 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 421 & 440{,}5 \\ 559 & 538{,}5 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, рассматривая цены первого полугодия в качестве реальных, увидим, что реальная стоимость товаров, произведенных первым предприятием во втором полугодии равна 421 тысяче долларов, номинальная стоимость: 440,5 тысяч долларов. Стоимость товаров, произведенных вторым предприятием, равна 559 тысяч и 538,5 тысяч долларов, соответственно.

Сформулируем **правило для умножения матриц**:

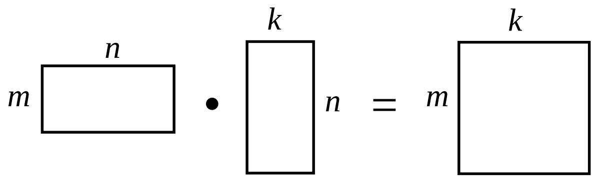
Пусть имеются матрицы

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn} \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1k} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nk} \end{pmatrix}.$$

Их произведением является матрица $Z = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} & \cdots & z_{1k} \\ z_{21} & z_{22} & \cdots & z_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ z_{m1} & z_{m2} & \cdots & z_{mk} \end{pmatrix}$,

элементы которой вычисляются по правилу: $z_{i\,j} = x_{i\,1} \cdot z_{1j} + x_{i\,2} \cdot z_{2j} + \ldots + x_{i\,n} \cdot z_{nj}$, где $i = 1, \ldots, m; \quad j = 1, \ldots, k.$

Для того чтобы запомнить это правило полезно использовать картинку:



Заметим, что произведение матриц определено только в том случае, когда число столбцов первого сомножителя равно числу строк второго (выпуск в денежном выражении может быть определен только в том случае, когда имеется цена каждого типа товара). Таким образом, имеется существенное различие между произведением чисел и произведением матриц. Как известно, произведение чисел не зависит от порядка сомножителей — имеет место коммутативный закон. В случае матриц этот закон не действует. Может оказаться так, что после перемены мест матриц произведение будет не определено. Так, выше было вычислено произведение $A \cdot P1$. В то же время, произведение матриц $P1 \cdot A$ не определено. И даже в тех случаях, когда XY и YX существуют, они не обязаны быть равными.

Пример

$$XY = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -4 \\ 15 & -9 \end{pmatrix};$$

$$YX = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 9 & -3 \end{pmatrix}.$$

Упражнение 10.2.

С. Пусть $S=\begin{pmatrix} 9 & 21 & 15 \\ 22 & -7 & 11 \\ 7 & 2{,}3 & -4 \end{pmatrix}$; $T=\begin{pmatrix} 8 & 2{,}1 & -8 \\ -6 & 1 & 14 \\ 6 & 18 & -2 \end{pmatrix}$; $R=\begin{pmatrix} 12 & -2 \\ 2 & 5 \\ -17 & 1 \end{pmatrix}$.

Вычислить: $S{\cdot}T$; $S{\cdot}R$; $T{\cdot}S$; $R{\cdot}T$.

Н. Пусть $K=\begin{pmatrix} 21 & -2 \\ 2 & -5 \\ -1{,}7 & 10 \end{pmatrix}$; $L=\begin{pmatrix} 8 & 2{,}1 & -8 \\ -6 & 1 & 14 \\ 6 & 18 & -2 \end{pmatrix}$; $M=\begin{pmatrix} 2 & -2{,}7 \\ 32 & -5 \\ 1{,}7 & 1 \end{pmatrix}$.

Вычислить: $K{\cdot}L$; $L{\cdot}M$; $K{\cdot}M$; $L{\cdot}K$.

10.3. Единичная матрица

Основная диагональ квадратной матрицы состоит из элементов, имеющих одинаковый номер строки и номер столбца – элементы вида a_{ii} . Квадратная матрица, главная диагональ которой состоит из единиц, а все остальные элементы являются нулями, называется единичной матрицей и обычно обозначается буквой ***I***. Единичная матрица разных порядков:

$$(1),\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ldots.$$

В естественности названия единичная матрица легко убедиться: если мы умножим любую матрицу на единичную матрицу, мы получим исходную матрицу ($A{\cdot}I = A$ или $I{\cdot}A = A$):

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & -11 & 54 \\ -9 & 324 & 44 \\ -9 & 56 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 & -11 & 54 \\ -9 & 324 & 44 \\ -9 & 56 & 0 \end{pmatrix}.$$

Четвертой арифметической операции — делению, в теории матриц соответствует умножение на обратную матрицу. (Вместо того, чтобы делить число a на число b, мы можем перемножить a и b^{-1}, например, $7{:}2 = 7{\cdot}(2)^{-1}$).

Матрица Y является обратной матрицей X, если $XY = I = YX$. Матрица, обратная к матрице X обычно обозначается X^{-1}.

Задача

Убедитесь в том, что, если $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, то $X^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1,5 & -0,5 \end{pmatrix}$.

Решение

Для того чтобы убедится в том, что матрица X^{-1} является обратной к матрице X, достаточно перемножить эти матрицы:

$$X \cdot X^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1,5 & -0,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1(-2)+2\cdot 1,5 & 1\cdot 1+2(-0,5) \\ 3(-2)+4\cdot 1,5 & 3\cdot 1+4(-0,5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Из определения следует, что обратная матрица существует только для квадратных матриц. Мы обсудим методы их нахождения в следующих разделах.

Упражнение 10.3. Убедитесь в том, что:

C. a) если $X = \begin{pmatrix} -20 & 5 \\ -8 & 3 \end{pmatrix}$, то $X^{-1} = \begin{pmatrix} -0,15 & 0,25 \\ -0,4 & 1 \end{pmatrix}$;

b) если $T = \begin{pmatrix} 3 & -4 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & -2 \end{pmatrix}$, то $T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

H. a) если $X = \begin{pmatrix} 8 & -12 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$, то $X^{-1} = \begin{pmatrix} 0,08 & 0,12 \\ -0,03 & 0.08 \end{pmatrix}$;

b) если $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, то $T^{-1} = \begin{pmatrix} 1,4 & 0,2 & -0,4 \\ 1,2 & -0,4 & -0,2 \\ -1,6 & 0,2 & 0,6 \end{pmatrix}$.

10.4. Транспонированная матрица

Далее, рассмотрим понятие транспонированная матрица. Она широко применяется в прикладных задачах.

Итак, если поменять местами строки и столбцы матрицы X, то получится транспонированная матрица X^T.

Пример Если $X = (5 \;\; -2)$, то $X^T = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$;

если $X = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -5 \\ 7 & -2 \end{pmatrix}$, то $X^T = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 7 \\ -2 & -5 & -2 \end{pmatrix}$.

Упражнение 10.4.

С. Пусть $S = \begin{pmatrix} 9 & 21 & 15 \\ 22 & -7 & 11 \\ 7 & 2,3 & -4 \end{pmatrix}$; $P = \begin{pmatrix} 8 & 2 & -8 \\ -6 & 1 & 14 \\ 6 & 1,8 & -2 \end{pmatrix}$; $R = \begin{pmatrix} 12 & -2 \\ 2 & 5 \\ -17 & 1 \end{pmatrix}$.

Вычислить: S^T; R^T; $P{\cdot}R^T$; $10P + S^T$; $R^T{\cdot}P$.

Н. Пусть $K = \begin{pmatrix} 21 & -2 \\ 2 & -5 \\ -1,7 & 10 \end{pmatrix}$; $L = \begin{pmatrix} 8 & 2,1 & -8 \\ -6 & 1 & 14 \\ 6 & 18 & -2 \end{pmatrix}$; $M = \begin{pmatrix} 2 & -2,7 \\ 32 & -5 \\ 1,7 & 1 \end{pmatrix}$.

Вычислить: K^T; L^T; $L^T{\cdot}M$; $K^T - 2M$; $K^T - 2M^T$.

10.5. Задача

Угур и Ураз торгуют мячами. За прошедший период Угур купил 25 футбольных, 12 баскетбольных мячей и продал 28 футбольных, 10 баскетбольных мячей. Ураз купил 18 футбольных, 16 баскетбольных мячей и продал 17 футбольных, 17 баскетбольных мячей. Они используют наценку 20% — каждую единицу товара они продают на 20% дороже, чем они покупают. Определите прибыль Угура и прибыль Ураза, зная, что они покупают футбольный мяч за 8 долларов, баскетбольный мяч за 7,5 долларов. Какой была бы их прибыль, если бы они покупали футбольный мяч за 7 долларов, баскетбольный — за 10 долларов?

Решение

Начнем с вычисления выручки, затрат и прибыли.

Затраты Угура: $25{\cdot}8 + 12{\cdot}7,5 = 290$; выручка: $28{\cdot}(1,2{\cdot}8)+10{\cdot}(1,2{\cdot}7,5) = 358,8$; прибыль: $358,8 - 290 = 68,8$.

Затраты Ураза: $18{\cdot}8 + 16{\cdot}7,5 = 264$; выручка: $17{\cdot}(1,2{\cdot}8)+17{\cdot}(1,2{\cdot}7,5) = 316,2$; прибыль: $316,2 - 264 = 52,2$.

Если футбольный мяч был куплен за \$7, баскетбольный — за \$10, то затраты Угура: $25{\cdot}7 + 12{\cdot}10 = 295$; выручка: $28{\cdot}(1,2{\cdot}7)+10{\cdot}(1,2{\cdot}10) = 355,2$; прибыль: $355,2–295 = 60,2$;

затраты Ураза: $18 \cdot 7 + 16 \cdot 10 = 286;$ выручка: $17 \cdot (1,2 \cdot 7) + 17 \cdot (1,2 \cdot 10) = 346,8;$ прибыль: $316,2–264 = 60,8$.

Решение завершено. Но если воспользоваться матрицами, запись будет заметно более компактной, а объем вычислений меньше.

Итак, матрица покупок и матрица продаж Угура и Ураза имеют вид: $\begin{pmatrix} 25 & 12 \\ 18 & 16 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 28 & 10 \\ 17 & 17 \end{pmatrix}$, матрица цен: $\begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 7,5 & 10 \end{pmatrix}$.

Поэтому, прибыль каждого из них выражается матричным выражением $\begin{pmatrix} 28 & 10 \\ 17 & 17 \end{pmatrix} \cdot 1,2 \begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 7,5 & 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 25 & 12 \\ 18 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 7,5 & 10 \end{pmatrix}$.

Отметим, что умножение на 1,2 определяется торговой наценкой 20%. Вынесем матрицу цен за скобки:

$$\begin{pmatrix} 28 & 10 \\ 17 & 17 \end{pmatrix} \cdot 1,2 \begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 7,5 & 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 25 & 12 \\ 18 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 7,5 & 10 \end{pmatrix} =$$

$$= \left[\begin{pmatrix} 28 & 10 \\ 17 & 17 \end{pmatrix} \cdot 1,2 - \begin{pmatrix} 25 & 12 \\ 18 & 16 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 7,5 & 10 \end{pmatrix}.$$

В результате оказалось, что для расчета прибыли достаточно применить торговую наценку к матрице продаж, умножив ее на соответствующий коэффициент, вычесть матрицу покупок из произведения и умножить полученную разницу на матрицу цен.

В случае Угура и Ураза, мы получаем

$$\left[\begin{pmatrix} 28 & 10 \\ 17 & 17 \end{pmatrix} \cdot 1,2 - \begin{pmatrix} 25 & 12 \\ 18 & 16 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 7,5 & 10 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 8,6 & 0 \\ 2,4 & 4,4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 7,5 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 68,8 & 60,2 \\ 52,2 & 60,8 \end{pmatrix}.$$

Упражнение 10.5.

С. Ольга, Елена и Эльмира торгуют 2 типами кепок. Они используют 40% торговую наценку — продают каждую единицу товара на 40% дороже, чем покупают. Ольга продала 15 кепок типа А, 12 — типа В. В то же время она купила 14 кепок типа А, 16 – типа В. Соответствующие данные Елены: продажи 14; 18, покупки 18; 17. У Эльмиры: продажи 25; 20, покупки 18; 28. Определите прибыль каждой, зная, что они покупали кепку типа А за 6 долларов, кепку типа В за 4,1 доллара. Какой была бы их прибыль, если бы кепка типа А была куплена за 7 долларов, а кепка типа В— за 5 долларов?

Н. Таалай и Бакыт торгуют 3 типами шахмат. При этом они используют 25% торговую наценку — продают каждую единицу товара на 25% дороже, чем покупают. Таалай продал 11 шахмат типа А, 12 — типа В, 18 — типа С. В то же время он купил 16 шахмат типа А, 7 — типа В, 14 — типа С. Соответствующие данные Бакыта: продажи 18; 15; 3, покупки 22; 13; 9.

Определите прибыль каждого, зная, что они покупали шахматы типа А за $6, типа В за $4, типа С за $10. Какой была бы их прибыль, если бы шахматы типа А были куплена за $10, типа В за $5, типа С за $2?

10.6. Задача

Камила, Наргиза и Дениза торгуют 3 типами калькуляторов. При этом они используют 20% торговую наценку — они продают каждую единицу товара на 20% дороже, чем покупают. Камила продала 9 калькуляторов типа А, 21 — типа В, 15 — типа С. В то же время она купила 8 калькуляторов типа А, 21 — типа В, 18 — типа С. Соответствующие данные Наргизы: продажи 22; 17; 11, покупки 26; 11; 14. У Денизы: продажи 17; 23; 14, покупки 6; 18; 21. Определите, по каким ценам покупались калькуляторы, зная, что прибыль Камилы $18,9, Наргизы $20,7, Денизы $46,2.

Решение Выпишем матрицу продаж S и покупок T:

$$S = \begin{pmatrix} 9 & 21 & 15 \\ 22 & 17 & 11 \\ 17 & 23 & 14 \end{pmatrix}; \quad T = \begin{pmatrix} 8 & 21 & 18 \\ 26 & 11 & 14 \\ 6 & 18 & 21 \end{pmatrix}.$$

Учитывая торговую наценку, вычислим матрицу ($1,2S - T$) — матрицу коэффициентов системы линейных алгебраических уравнений, которая позволит определить цены:

$$(1{,}2S - T) = 1{,}2\begin{pmatrix} 9 & 21 & 15 \\ 22 & 17 & 11 \\ 17 & 23 & 14 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 & 21 & 18 \\ 26 & 11 & 14 \\ 6 & 18 & 21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2{,}8 & 4{,}2 & 0 \\ 0{,}4 & 9{,}4 & -0{,}8 \\ 14{,}4 & 9{,}6 & -4{,}2 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, для того чтобы определить цены, достаточно решить систему линейных алгебраических уравнений $\begin{cases} 2{,}8a + 4{,}2b = 18{,}9; \\ 0{,}4a + 9{,}4b - 0{,}8c = 20{,}7; \\ 14{,}4a + 9{,}6b - 4{,}2c = 46{,}2. \end{cases}$ Решение начнем с вычисления определителя системы, раскладывая его по первому столбцу:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2{,}8 & 4{,}2 & 0 \\ 0{,}4 & 9{,}4 & -0{,}8 \\ 14{,}4 & 9{,}6 & -4{,}2 \end{vmatrix} = 2{,}8[9{,}4(-4{,}2) - 9{,}6(-0{,}8)] -$$

$$-0{,}4[4{,}2(-4{,}2) - 9{,}6 \cdot 0)] + 14{,}4[4{,}2(-0{,}8) - 9{,}4 \cdot 0)] =$$

$$= 2{,}8[-31{,}8] - 0{,}4[-17{,}64] + 14{,}4[-3{,}36] = -130{,}368\ .$$

Конечно, определитель третьего порядка можно вычислить многими способами. Но метод, который мы используем, позволяет существенно сократить объем вычислений. Так, при вычислении определителя Δ_a, мы можем воспользоваться минорами, которые уже вычислены: $\Delta_a = \begin{vmatrix} 18{,}9 & 4{,}2 & 0 \\ 20{,}7 & 9{,}4 & -0{,}8 \\ 46{,}2 & 9{,}6 & -4{,}2 \end{vmatrix} =$

$$= 18{,}9[-31{,}8] - 20{,}7[-17{,}64] + 46{,}2[-3{,}36] = -391{,}104\ .$$

Далее, следуя методу Крамера, мы должны вычислить определители Δ_b и Δ_c. Однако, будет проще воспользоваться исключением неизвестных.

Так как $\Delta \cdot a = \Delta_a$, получаем $a = -391{,}104/(-130{,}368) = 3$. Далее, подставив $a = 3$ в первое уравнение системы, получим: $4{,}2b = 18{,}9 - 2{,}8 \cdot 3 \Leftrightarrow b = 2{,}5$. Затем, из второго уравнения: $-0{,}8c = 20{,}7 - 0{,}4 \cdot 3 - 9{,}4 \cdot 2{,}5 \iff c = -4/(-0{,}8) = 5$.

Таким образом, мы определили цены, по которым покупались калькуляторы: типа А за \$3, типа В — за \$2,5, типа С — за \$5.

Упражнение 10.6.

С. Ира, Стас и Жибек торгуют 3 типами футболок. При этом они используют 40% торговую наценку — они продают каждую единицу товара на 40% дороже, чем покупают. Ира продала 15 футболок типа А, 17 — типа В, 13 — типа С. В то же время она купила 14 футболок типа А, 21 — типа В, 16 — типа С. Соответствующие данные Стаса: продажа 19; 14; 18, покупки 30; 18; 27. У Жибек: продажа 25; 20; 16, покупки 31; 28; 25. Определите, по каким ценам покупались футболки, зная, что прибыль Иры была \$72,9, Стаса — (– \$23,9), Жибек — \$16,3.

Н. Тахир, Арген и Элеонора торгуют 3 типами шорт. При этом они используют 30% торговую наценку — они продают каждую единицу товара на 30% дороже, чем покупают. Тахир продал 11 шорт типа А, 23 — типа В, 28 — типа С. В то же время он купил 16 шорт типа А, 27 — типа В, 40 — типа С. Соответствующие данные Аргена: продажи 18; 25; 30, покупки 22; 35; 39. У Элеоноры: продажи of 19; 16; 26, покупки 27; 23; 31. Определите, по каким ценам покупались шорты, зная, что прибыль Тахира была равна (–\$35,8), Аргена — (–\$17), Элеоноры — (–\$43,6).

Итоговые задания

1.Имеются матрицы: $A=\begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -0{,}2 & 4 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 2{,}1 & 5 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} 1/3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Вычислите: *a) A+B; b) 2B–3A; c) 2B – C; d) AB; e) BA; f) A(2C); g) CB; h) BC – 3C; i) (B–3I)C,* где I — единичная матрица, и сравните результат с h); *j)* A^T; *k)* C^T.

2. Пусть

$$A = (3 \quad 0{,}4 \quad 2),\ B=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 7 \\ 11 & 9 & 5 \\ 10 & 0 & -4 \end{pmatrix};\ C=\begin{pmatrix} -2/3 & 4 & 9 \\ -16 & 2 & 3 \\ 8{,}12 & 5 & 8 \end{pmatrix};\ D=\begin{pmatrix} 16 \\ -4 \\ 21 \end{pmatrix}.$$

Вычислите: *a) B + 2C; b) C–2D; c) 3A+5D; d) A–B; e) B–A, f) C– D; g) AB–CD;* *h)* A^T; *i)* C^T.

3. Пусть $A=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 0 & 3 \end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix} 4 & 10 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$. Вычислите:

a) AB; b) BC; c) CB; d) BC–2B. Убедитесь в справедливости равенства $BC-2B = B(C-2I)$, где I — единичная матрица.

4. Пусть $A=\begin{pmatrix} 5 & 7 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} -2 & 8 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix} 8 & -9 & 4 \\ 11 & 3 & -5 \end{pmatrix}$.

Вычислите: *AB; AC; BI; BA; CA; IB; BC – 2C.*

5. На первом грузовике перевезли 23 маленьких, 19 средних и 10 больших мешков муки. На втором грузовике перевезли 12 маленьких, 25 средних и 16 больших мешков муки. Сколько килограмм муки было перевезено на каждом грузовике, если вес маленького мешка 24 кг, среднего — 48 кг, большого — 60 кг? Решите задачу, выписав информацию о количествах мешков и их весе в виде матриц.

6. Фирма ASK имеет три однопрофильные компании, впускающие два вида товаров. Первая компания в первом квартале произвела 12 единиц товара вида A и 33 единицы товара вида B. Во втором квартале эта компания произвела 16,4 единиц товара вида A и 35 единиц товара вида B. Соответствующие данные по 4–му кварталу: 17 и 31. Вторая компания в 1–м квартале произвела 15,2 единиц товара вида A и 18 единиц товара вида B. Соответствующие данные по второму и четвертому кварталам: 15, 15 и 12, 18. Результаты 3–ей компании в первом, втором и четвертом кварталах: (20; 7), (20; 8) и (22; 8).

Также известны и готовые итоги. Первая компания произвела 67,5 единиц товара вида A и 120 единиц товара вида B, вторая: 59 и 70, третья: 85 и 31.

Выпишите данные в виде матриц. Определите выпуск продукции в первом полугодии и третьем квартале.

Руководство фирмы планирует увеличить выпуск каждого вида товара на 20% в будущем году. Конкретизируйте план выпуска каждого вида товара.

Если единица товара A стоит 120 сомов, товара B — 200 сомов, чему равен валовый выпуск каждой компании в сомах:

a) в первом квартале; b) во втором полугодии?

7. Убедитесь в том, что:

a) если $X = \begin{pmatrix} 2 & 0,5 \\ -8 & 3 \end{pmatrix}$, то $X^{-1} = \begin{pmatrix} 0,3 & -0,05 \\ 0,8 & 0,2 \end{pmatrix}$;

b) если $T = \begin{pmatrix} -1,6 & 0,6 & 0,8 \\ 3,8 & -0,8 & -1,4 \\ -1,2 & 0,2 & 0,6 \end{pmatrix}$, то $T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -4 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

8. Руслан и Мира торгуют 2 типами часов, используя 30% торговую наценку — они продают каждую единицу товара на 30% дороже, чем покупают. Руслан продал 20 часов типа А, 35 — типа В. В то же время он купил 23 часа типа А, 32 — типа В. Соответствующие данные Миры: продажи 33; 40, покупки 34; 40. Определите прибыль каждого, зная, что они покупали часы типа А за \$2, часы типа В за \$4. Какой была бы их прибыль, если бы часы типа А были куплена за \$3, часы типа В за \$2,5?

9. Алтынбек и Анна торгуют 3 типами галстуков. При этом они используют 10% торговую наценку — они продают каждую единицу товара на 10% дороже, чем покупают. Алтынбек продал 20 галстуков типа А, 29 — типа В, 30 — типа С. В то же время он купил 22 галстука типа А, 26 — типа В, 30 — типа С. Анна продала: 18; 22; 30, купила 15; 24; 28. Определите прибыль каждого, зная, что они покупали галстуки типа А за \$5, типа В за \$3, типа С за \$4. Какой была бы их прибыль, если бы галстуки типа А были куплена за \$3, типа В за \$2,5, типа С за \$4?

Если ориентироваться на изученные разделы курса, то в АУЦА приближается окончание семестра, и для студентов наступает пора оценить свои знания перед заключительным отрезком учебного курса. Для этого, будет полезно постараться выволнить задания второго квиза.

КВИЗ 2

Вариант 1

1–2. Пусть

$$A = (3 \quad -1 \quad 2),\ B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -5 \\ 0 & 6 & 2 \\ -8 & 12 & 1 \end{pmatrix};\ C = \begin{pmatrix} 2 & 8 & -6 \\ -21 & 0{,}4 & 7 \\ -4 & 0 & -1 \end{pmatrix};\ D = \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Вычислите: *a)* $C + 3I$; *b)* DA; *c)* CB; *d)* $A - AB$; *e)* C^T; *f)* $A^T - B$; *g) определитель матрицы* C.

3. Фирма А продала 45% своей продукции в Бишкеке, 30% – в Алматы и 25% – в Токмаке. Соответствующие данные фирмы В: 35%, 35%, 30%; фирмы С: 55%, 25%, 20%. Сколько единиц товара произвела каждая фирма, если в Бишкеке получили 462 единицы, в Алматы — 294, в Токмаке — 244.

4–6. Решите системы:

4) $\begin{cases} 27x - 5y = 38; \\ -81x + 15y = -114. \end{cases}$

5) $\begin{cases} 7x - 9y + 8z = 13; \\ 23x + 11y - 23z = 15; \\ 37x - 7y - 7z = 44. \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 27x - 11y + 8z = 13; \\ 7x + 9y - 23z = 250; \\ 13x - 21y + 9z = -124. \end{cases}$

7. Даны точки $A(2, -1)$, $B(-1, 3)$, $C(4, 5)$. Найдите площадь треугольника ABM, где точка M является серединой отрезка BC.

8. Исследуйте систему на разрешимость и выпишите решения в каждом частном случае: $\begin{cases} 2x + 5y = -10; \\ ax - 7y = 14. \end{cases}$

КВИЗ 2

Вариант 2

1–2. Пусть

$$A = (3 \quad -1 \quad 2), \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -5 \\ 1{,}1 & 6 & 2 \\ -8 & 12 & 1 \end{pmatrix}; \; C = \begin{pmatrix} 2 & 8 & -6 \\ -21 & 0{,}4 & 7 \\ -4 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \; D = \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Вычислите: *a)* $2B + I$; *b)* AD; *c)* BC; *d)* $A - AC$; *e)* B^T; *f)* $A^T - D$; *g) определитель матрицы B.*

3. Для того чтобы поддерживать здоровье и работоспособность Вика употребляет 26 единиц витамина А, 29 единиц витамина В и 61 единицу витамина С. Одна упаковка продукта P содержит 3 единицы витамина А, 3 единицы В и 2 единицы С. Одна упаковка продукта Q содержит, соответственно, 0; 1; 4 единицы, а одна упаковка продукта R: 4; 3; 5 единиц. Сколько упаковок продукта P, продукта Q и продукта R употребляет Вика?

4–6. Решите системы:

4) $\begin{cases} 15a - 8b = -9; \\ -45a + 24b = 27. \end{cases}$

5) $\begin{cases} 15x - 81y + 31z = -279; \\ 51x + 19y - 23z = -247; \\ 13x + 29y = 93. \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 17x - 11y + 31z = 29; \\ 21x + 9y - 23z = -7; \\ 13x - 31y + 85z = 65. \end{cases}$

7. Даны точки $A(2, -1)$, $B(-1, 3)$, $C(4, 5)$. Найдите площадь треугольника ABM, где точка M является серединой отрезка AC.

8. Исследуйте систему на разрешимость и выпишите решения в каждом частном случае: $\begin{cases} cx + 12y = 18; \\ 3x + cy = 9. \end{cases}$

§11. ОБРАТНАЯ МАТРИЦА

В своем знаменитом романе «Отверженные» Виктор Гюго пишет: «*Только с помощью науки можно воплотить возвышенную мечту поэтов: красоту общественного строя. На той ступени, какой достигла цивилизация, точность — необходимый элемент прекрасного; научная мысль не только помогает художественному чутью, но и дополняет его; мечта должна уметь вычислять. Искусству–завоевателю наука должна служить опорой, как боевой конь. Очень важно, чтобы эта опора была надежной*».

Эта цитата является еще одним подтверждением важности математики, умения вычислять. Но, несмотря на эту, пожалуй, очевидную истину, можно встретить значительное число людей, даже с высшим образованием, которые не только не умеют считать — они даже отрицают эту необходимость. По нашему мнению, истоки этого удивительного явления находятся в школьных и вузовских курсах математики, которые, очень часто скучны, трудно усваиваемы, малопривлекательны. Поэтому, пересмотр содержания математических курсов, методики их изложения является актуальной задачей.

Значительное место в вузовском курсе математики занимают системы линейных алгебраических уравнений. Это интересная и важная для приложений математики тема. Но, к сожаленью, во многих учебниках нет ни одной текстовой задачи, иллюстрирующей их применение. А как говорил Дави́д Ги́льберт – немецкий математик–универсал, внесший значительный вклад в развитие многих областей математики в 19–20 веке, который в 1910–1920–е годы (после смерти Анри Пуанкаре) был признанным мировым лидером математиков: «Для того, чтобы сделать урок интересным, необходимо искать подходящий пример».

В этом параграфе изучение обратной матрицы основано на задачах и ситуациях, которые могут сделать процесс увлекательным и полезным.

11.1. Задача

Три друга, Бакай, Санжар и Самат приехали на каникулы из разных университетов. Однажды вечером они решили побросать мяч в баскетбольную корзину.

Бакай 13 раз забил из–под кольца, 6 раз со средней дистанции и 4 — с дальней.

Санжар 14 раз забил из–под кольца, 8 раз со средней дистанции и 2 — с дальней.

Самат 16 раз забил из–под кольца, 6 раз со средней дистанции и 3 — с дальней.

После этого Бакай сказал, что по правилам подсчета очков, которые используются в его университете, он выиграл, потому что набрал 41 очков, в то время как Санжар набрал 38 очков, а Самат — 40 очков.

Санжар, в свою очередь, сказал, что выиграл он, потому что по правилам его университета набрал 124 очка, а у Бакая и Самата получилось по 123 очка.

Не удивительно, что с друзьями не согласился Самат. Он сказал, что если придерживаться правил его университета, то выиграл он, набрав 87 очков. Бакай при этом набрал 83 очка, Санжар — 84 очка.

Мудрая Кызжибек, которая присутствовала на этом состязании, заявила, что если придерживаться ее правил, то у всех будет по 80 очков.

Определите правила, по которым начисляются очки в каждом из университетов, а также правила предложенные Кызжибек.

Решение

Для того чтобы определить правила, по которым начисляются очки в университете Бакая нужно решить систему

$$\begin{cases} 13x + 6y + 4z = 41; \\ 14x + 8y + 2z = 38; \\ 16x + 6y + 3z = 40. \end{cases} \tag{11.1}$$

Соответственно, для определения правил в университете Санжара, нужно решить систему, которая получится, если поменять правую часть системы (11.1) — столбец

$F_1 = \begin{pmatrix} 41 \\ 38 \\ 40 \end{pmatrix}$ на $F_2 = \begin{pmatrix} 123 \\ 124 \\ 123 \end{pmatrix}$; надо заменить F_1 на $F_3 = \begin{pmatrix} 83 \\ 84 \\ 87 \end{pmatrix}$ для определения правил в университете Самата;

для правила Кызжибек нужно поменять F_1 на $F_4 = \begin{pmatrix} 80 \\ 80 \\ 80 \end{pmatrix}$.

Вместо того, чтобы решать четыре системы, мы можем решить эту задачу одним махом, использовав обратную матрицу.

Напомним, что квадратная матрица, у которой на главной диагонали стоят единички, а все остальные элементы равны нулю называется <u>единичной</u> и обозначается I.

Несложно проверить, что единичная матрица оправдывает свое название: Если любую матрицу умножить на единичную матрицу, то она не изменится: $MI = IM = M$.
Если имеют места равенства $BA = AB = I$, то матрица B называется <u>обратной</u> для матрицы A и обозначается A^{-1}.

Запишем систему (11.1) в виде матричного уравнения

$$AX = F_1, \tag{11.2}$$

где $A = \begin{pmatrix} 13 & 6 & 4 \\ 14 & 8 & 2 \\ 16 & 6 & 3 \end{pmatrix}$; $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$; $F_1 = \begin{pmatrix} 41 \\ 38 \\ 40 \end{pmatrix}$.

Вычислив обратную матрицу A^{-1}, умножим ее на уравнение (11.2): $A^{-1}AX = A^{-1}F_1$, и так как $A^{-1}AX = X$, равенство $X = A^{-1}F_1$ позволит выяснить правила подсчета очков в университете Бакая. Соответственно, правила подсчета очков в университете Санжара: $A^{-1}F_2$; в университете Самата: $A^{-1}F_3$; а правила Кызжибек: $A^{-1}F_4$.

Итак, «дело за малым»: нужно иметь обратную матрицу.

Обратную матрицу можно вычислить, приняв во внимание следующие соображения: Из уравнения $AA^{-1} = I$ и правил матричного умножения следует, что: 1–ый столбец обратной матрицы является решением системы $AX = I_1$, где I_1 является 1–м столбцом единичной матрицы; 2–ой столбец обратной матрицы является решением системы $AX = I_2$, где I_2 является 2–м столбцом единичной матрицы; ....

Таким образом, для того чтобы найти 1–ый столбец матрицы, обратной для $A = \begin{pmatrix} 13 & 6 & 4 \\ 14 & 8 & 2 \\ 16 & 6 & 3 \end{pmatrix}$, нужно решить систему

$$\begin{cases} 13x + 6y + 4z = 1; \\ 14x + 8y + 2z = 0; \\ 16x + 6y + 3z = 0. \end{cases} \qquad (11.3)$$

Понятно, что решить систему можно любым способом. Мы будем использовать метод Крамера–Гаусса.

Определитель матрицы коэффициентов системы — матрицы A: $\Delta = 13(8{\cdot}3 - 6{\cdot}2) - 14(6{\cdot}3 - 6{\cdot}4) + 16(6{\cdot}2 - 8{\cdot}4) = 13{\cdot}12 - 14(-6) + 16(-20) = -80$.

Заменив первый столбец в Δ на правую часть системы (11.3), получим $\Delta_x = 1{\cdot}12 - 0(-6) + 0(-20) = 12$.
Поэтому, $x = \Delta_x/\Delta = 12/(-80) = -0{,}15$.

Далее, подставив найденное значение $x = -0{,}15$, из первого и второго уравнений системы (11.3), получим
$\begin{cases} 6y + 4z = 1 - 13(-0{,}15); \\ 8y + 2z = 0 - 14(-0{,}15); \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6y + 4z = 2{,}95; \\ 8y + 2z = 2{,}1. \end{cases}$

Определитель матрицы коэффициентов этой системы:
$\Delta_1 = 6{\cdot}2 - 8{\cdot}4 = -20$. Соответственно, $\Delta_y = 2{,}95{\cdot}2 - 2{,}1{\cdot}4 = -2{,}5$, и отсюда, $y = -2{,}5/(-20) = 0{,}125$. И наконец, так как $y = 0{,}125$ из уравнения $6y + 4z = 2{,}95$ выясним, что $z = 0{,}55$.

Таким образом, первый столбец обратной матрицы: $\begin{pmatrix} -0{,}15 \\ 0{,}125 \\ 0{,}55 \end{pmatrix}$.

Для того чтобы определить второй столбец обратной матрицы, решим систему

$$\begin{cases} 13x + 6y + 4z = 0; \\ 14x + 8y + 2z = 1; \\ 16x + 6y + 3z = 0. \end{cases} \qquad (11.4)$$

Матрица коэффициентов этой системы та же, что и у системы (11.3). Поэтому, $\Delta = 13\cdot 12 - 14(-6) + 16(-20) = -80$,
а $\Delta_x = 0\cdot 12 - 1(-6) + 0(-20) = -6$. Тогда, $x = -6/(-80) = -0{,}075$.

Подставив $x = -0{,}075$, в 1–ое и 2–ое уравнения системы (11.4), получим $\begin{cases} 6y + 4z = 0 - 13(-0{,}075); \\ 8y + 2z = 1 - 14(-0{,}075); \end{cases} <=> \begin{cases} 6y + 4z = 0{,}975; \\ 8y + 2z = 2{,}05. \end{cases}$

Определитель матрицы коэффициентов этой системы уже вычислен: $\Delta_1 = -20$. Затем, $\Delta_y = 0{,}975\cdot 2 - 2{,}05\cdot 4 = -6{,}25$, и поэтому, $y = -6{,}25/(-20) = 0{,}3125$. Поэтому, из уравнения
$6y+4z = 0{,}975$ следует, что $z = (0{,}975 - 6\cdot 0{,}3125)/4 = -0{,}225$.

Итак, 2–ой столбец обратной матрицы $\begin{pmatrix} -0{,}075 \\ 0{,}3125 \\ -0{,}225 \end{pmatrix}$.

Таким же образом, решив систему $\begin{cases} 13x + 6y + 4z = 0; \\ 14x + 8y + 2z = 0; \\ 16x + 6y + 3z = 1. \end{cases}$ получим

третий столбец обратной матрицы: $\begin{pmatrix} 0{,}25 \\ -0{,}375 \\ -0{,}25 \end{pmatrix}$.

В результате, мы получили обратную матрицу для матрицы коэффициентов системы (11.2): $A^{-1} = \begin{pmatrix} -0{,}15 & -0{,}075 & 0{,}25 \\ 0{,}125 & 0{,}3125 & -0{,}375 \\ 0{,}55 & -0{,}225 & -0{,}25 \end{pmatrix}$.

Если вынести за скобки общий множитель, равный *1/(определитель матрицы коэффициентов системы),* то обратная матрица запишется в виде более удобном для использования: $A^{-1} = \dfrac{-1}{80}\begin{pmatrix} 12 & 6 & -20 \\ 10 & -25 & 30 \\ -44 & 18 & 20 \end{pmatrix}$.

Эту матрицу, как это было отмечено ранее, можно использовать для того чтобы выяснить правила подсчета очков в университете Бакая — их можно определить из произведения $A^{-1}F_1$. Так как $A^{-1}F_1 = \dfrac{-1}{80}\begin{pmatrix} 12 & 6 & -20 \\ 10 & -25 & 30 \\ -44 & 18 & 20 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 41 \\ 38 \\ 40 \end{pmatrix} = \dfrac{-1}{80}\begin{pmatrix} -80 \\ -160 \\ -320 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, выяснилось, что в университете Бакая за каждое попадание из под кольца дают 1 очко, за попадание со средней дистанции дают 2 очка, за попадание с дальней дистанции дают 4 очка.

Выполнив подобные вычисления можно ответить на оставшиеся вопросы. Мы можем определить правила в университете Санжара из $A^{-1}F_2$; Самата из $A^{-1}F_3$ и из $A^{-1}F_4$ правило Кызжибек.

Для того чтобы записать ответ в более компактной форме соберем правые части систем: F_1 , F_2 , F_3 и F_4 в виде матрицы F:

$F = \begin{pmatrix} 41 & 123 & 83 & 80 \\ 38 & 124 & 84 & 80 \\ 40 & 123 & 87 & 80 \end{pmatrix}$, и перемножим матрицы A^{-1} и F :

$$A^{-1}F = \frac{-1}{80}\begin{pmatrix} 12 & 6 & -20 \\ 10 & -25 & 30 \\ -44 & 18 & 20 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 41 & 123 & 83 & 80 \\ 38 & 124 & 84 & 80 \\ 40 & 123 & 87 & 80 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{-1}{80}\begin{pmatrix} -80 & -240 & -240 & -160 \\ -160 & -640 & -320 & -400 \\ -320 & -720 & -400 & -480 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 8 & 4 & 5 \\ 4 & 9 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Каждый столбец матрицы–произведения показывает ответ для соответствующего случая. Так, например, согласно элементам четвертого столбца, по правилам Кызжибек за каждое попадание из под кольца стоит 2 очка, за попадание со средней дистанции дают 5 очков, каждое попадание из под кольца стоит 6 очков.

Упражнение 11.1.

С. 1) Решить системы

a) $\begin{cases} 25x + 37y = 53; \\ 27x + 40y = 57. \end{cases}$ b) $\begin{cases} 25x + 37y = -34; \\ 27x + 40y = -37. \end{cases}$ c) $\begin{cases} 25x + 37y = 171; \\ 27x + 40y = 185. \end{cases}$

2) Саша шефствует над тремя семьями. Для семьи Тани она покупает 3 килограмма моркови, 5 килограммов картофеля и 1 килограмм риса в неделю. Для семьи Семена: 4 килограмма моркови и 7 килограммов картофеля; для семьи Алмаза: 2 килограмма моркови и 6 килограммов риса. Определить, по какой цене была куплена еда, если в первую неделю на продукты для семьи Тани было потрачено 244 сома; для семьи Семена — 212 сомов; для семьи Алмаза — 576 сомов. Каковы были цены во вторую, третью и четвертую недели, если расходы в соответствующие недели для семьи Тани составили: 240 сомов; 267 сомов; 235,5 сома; для семьи Семена — 213 сомов; 230 сомов; 223,5 сома; для семьи Алмаза — 550 сомов; 638 сомов; 522 сома?

Н. 1) Вычислите матрицу, обратную к $A=\begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 7 & 4 & 0 \\ 8 & 5 & 7 \end{pmatrix}$.

2) Студенты опекают два детских дома. Для детского дома А они покупают 23 килограмма конфет и 35 килограммов печенья каждый месяц; для детского дома В: 34 килограмма конфет и 50 килограммов печенья. Определить, по какой цене были куплены конфеты и печенье, если в первую неделю на детский дом А было потрачено 9500 сомов; на детский дом В — 13800 сомов. Какими были цены во вторую, третью и четвертую недели, если затраты в соответствующие недели для детского дома А составили: 9260 сомов; 9170 сомов; 9850 сомов; для детского дома В: 13480 сомов; 13 340 сомов; 14300 сомов?

11.2. Нахождение обратной матрицы методом Гаусса

Для того чтобы показать, как вычисляется обратная матрица методом Гаусса, рассмотрим следующую ситуацию:

Задача

Три фермера, которые выращивают пшеницу, кукурузу и откорма, согласились следовать общей политике: производить только определенное количество продукции и продавать по единым ценам. Квота для первого фермера составляла 30 тонн пшеницы, 50 тонн кукурузы и 40 тонн говядины, для второго: 20, 60 и 50 тонн, для третьего фермера: 60, 20 и 30 тонн, *соответственно. При каких ценах будут полностью покрыты их издержки, если издержки первого фермера были равны* c_1, *второго —* c_2, *третьего фермера —* c_3 *тысяч долларов.*

Решение

Чтобы определить цены, по которым расходы будут полностью покрыты, необходимо решить систему:

$$\begin{cases} 30x + 50y + 40z = c_1; \\ 20x + 60y + 50z = c_2; \\ 60x + 20y + 30z = c_3. \end{cases}$$

Здесь, x, y и z — цены каждого килограмма продукции; c_1, c_2, c_3 — издержки фермеров.

Из–за того, что цены на факторы производства могут меняться, меняются и издержки. Поэтому, чтобы иметь возможность быстро получить решение для любых значений c_1, c_2, c_3 удобно использовать обратную матрицу.

Нахождение обратной матрицы A^{-1} методом Гаусса начинается с записи супер–расширенной матрицы в виде $(A \mid I)$, где I – единичная матрица. Затем, используя элементарные операции над строками матрицы, матрица A преобразуется в единичную матрицу. Тогда вместо единичной матрицы появляется матрица, обратная к A: $(A \mid I) => (I \mid A^{-1})$.

Для матрицы коэффициентов системы в задаче о фермерских хозяйствах супер–расширенная матрица имеет вид:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 30 & 50 & 40 & 1 & 0 & 0 \\ 20 & 60 & 50 & 0 & 1 & 0 \\ 60 & 20 & 30 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$ Преобразуем эту матрицу.

В процессе трансформации будут использоваться обозначения, описанные при использовании метода Гаусса.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 30 & 50 & 40 & 1 & 0 & 0 \\ 20 & 60 & 50 & 0 & 1 & 0 \\ 60 & 20 & 30 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 = r_1 - r_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 10 & -10 & -10 & 1 & -1 & 0 \\ 20 & 60 & 50 & 0 & 1 & 0 \\ 60 & 20 & 30 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3=r_3-6r_1]{R_2=r_2-2r_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 10 & -10 & -10 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 80 & 70 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 80 & 90 & -6 & 6 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3=r_3-r_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 10 & -10 & -10 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 80 & 70 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 20 & -4 & 3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3=r_3:20}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 10 & -10 & -10 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 80 & 70 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -0{,}2 & 0{,}15 & 0{,}05 \end{array}\right) \xrightarrow[R_2=r_2-70r_3]{R_1=r_1+10r_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 10 & -10 & 0 & -1 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0 & 80 & 0 & 12 & -7{,}5 & -3{,}5 \\ 0 & 0 & 1 & -0{,}2 & 0{,}15 & 0{,}05 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1=r_1+r_2:8}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 10 & 0 & 0 & 0{,}5 & -0{,}4375 & 0{,}0625 \\ 0 & 80 & 0 & 12 & -7{,}5 & -3{,}5 \\ 0 & 0 & 1 & -0{,}2 & 0{,}15 & 0{,}05 \end{array}\right) \xrightarrow[R_2=r_2:80]{R_1=r_1:10}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 10 & 0 & 0 & 0{,}5 & -0{,}4375 & 0{,}0625 \\ 0 & 80 & 0 & 12 & -7{,}5 & -3{,}5 \\ 0 & 0 & 1 & -0{,}2 & 0{,}15 & 0{,}05 \end{array}\right) \xrightarrow[R_2=r_2:80]{R_1=r_1:10}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0{,}05 & -0{,}04375 & 0{,}00625 \\ 0 & 1 & 0 & 0{,}15 & -0{,}09375 & -0{,}04375 \\ 0 & 0 & 1 & -0{,}2 & 0{,}15 & 0{,}05 \end{array}\right).$$

Нахождение обратной матрицы закончено. Теперь вынесем за скобки общий множитель *1/160 = 0,00625*, определяемый детерминантом исходной матрицы и получим удобную для вычислений форму:

$$\begin{pmatrix} 0{,}05 & -0{,}04375 & 0{,}00625 \\ 0{,}15 & -0{,}09375 & -0{,}04375 \\ -0{,}2 & 0{,}15 & 0{,}05 \end{pmatrix} = \frac{1}{160}\begin{pmatrix} 8 & -7 & 1 \\ 24 & -15 & -7 \\ -32 & 24 & 8 \end{pmatrix}.$$

В итоге, мы имеем удобный инструмент для проведения правильной ценовой политики. Например, если издержки фермеров равны: $c_1 = 177{,}5;$ $c_2 = 217;$ $c_3 = 139$ тысяч долларов, то для все затраты будут покрыты при ценах:

$$\frac{1}{160}\begin{pmatrix} 8 & -7 & 1 \\ 24 & -15 & -7 \\ -32 & 24 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 177{,}5 \\ 217 \\ 139 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{160}\begin{pmatrix} 8 \cdot 177{,}5 + (-7)217 + 1 \cdot 139 \\ 24 \cdot 177{,}5 + (-15)217 + (-7)139 \\ (-32)177{,}5 + 24 \cdot 217 + 8 \cdot 139 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}25 \\ 0{,}2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

То есть, цена килограмма пшеницы должна быть \$0,25; кукурузы \$0,2; говядины \$4.

В то же время, если они планируют получить прибыль 31,5; 38; 22 тысяч долларов, соответственно, цены должны быть: $\frac{1}{160}\begin{pmatrix} 8 & -7 & 1 \\ 24 & -15 & -7 \\ -32 & 24 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 177{,}5 + 31{,}5 \\ 217 + 38 \\ 139 + 22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}3 \\ 0{,}4 \\ 4{,}5 \end{pmatrix}.$

Упражнение 11.2.

С. Вычислите обратную матрицу, если она существует:

1. $\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -1 & 1/2 \end{pmatrix}$; **2**. $\begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$; **3**. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$; **4**. $\begin{pmatrix} 21 & 17 & 31 \\ 23 & -1 & 19 \\ 17 & 53 & 55 \end{pmatrix}$

Н. Вычислите обратную матрицу, если она существует:

1. $\begin{pmatrix} -14 & 5 \\ 7 & -3 \end{pmatrix}$; **2**. $\begin{pmatrix} 33 & -69 \\ -11 & 23 \end{pmatrix}$; **3**. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -4 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$; **4**. $\begin{pmatrix} 11 & 107 & 91 \\ 23 & -1 & 19 \\ 17 & 53 & 55 \end{pmatrix}$

Итоговые упражнения

1–6. Вычислите обратную матрицу, если она существует:

1. $\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 9 & 7 \end{pmatrix}$; **2**. $\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$;

3. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ **4**. $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ **5**. $\begin{pmatrix} -51 & -29 & 52 \\ 7 & 4 & -7 \\ 9 & 5 & -9 \end{pmatrix}$ **6**. $\begin{pmatrix} 2{,}5 & -0{,}5 & -0{,}5 \\ -1 & 1 & 0 \\ -0{,}5 & -0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}$

7. Докажите, что матрица $\dfrac{1}{D}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ является обратной к матрице $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ с ненулевым определителем D.

8. Решите задачу о баскетболе из пункта 11.1 методом Гаусса.

9. Решите задачу о фермерах из пункта 11.2 методом Крамера–Гаусса.

Дополнение. *Криптография*

Криптографией называется искусство написания и прочтения шифрованных сообщений. Она нужна не только шпионам и разведчикам. В настоящее время, в век компьютеров, криптография очень популярна в связи с бурным развитием информационных технологий.

В данном разделе мы познакомимся с простейшими способами составления и прочтения секретных сообщений.

11. А.1. Задача

Однажды знаменитый пират Джек Воробей был схвачен и посажен в тюрьму. Находясь в тюрьме, он получил посылку от друзей. Там были хлеб, немного рыбы, бутылка с очень маленьким количеством рома на дне (остальное выпили тюремщики) и колоду карт. Изучив порядок расположения карт в колоде, Джек узнал причину ареста. Как он это сделал?

Оказывается, у его команды был разработан секретный код – каждая карта обозначала определенную букву. Поэтому, складывая карты в нужном порядке, онимогли передавать друг другу сообщения, о которых непосвященные не догадывались. Давайте и мы приобщимся к кругу друзей Джека Воробья. Договариваемся что, пиковая шестерка обозначает букву А, пиковая семерка – букву Б и так далее, согласно таблице 11.1.

А	Б	В	Г	Д	Е	Е	Ж	З
♠ 6	♠ 7	♠ 8	♠ 9	♠ 10	♠валет	♠ дама	♠ король	♠ туз
И	Й	К	Л	М	Н	О	П	Р
♣6	♣7	♣8	♣9	♣10	♣валет	♣дама	♣король	♣туз
С	Т	У	Ф	Х	Ц	Ч	Ш	Щ
♦ 6	♦ 7	♦ 8	♦ 9	♦ 10	♦ валет	♦ дама	♦ король	♦ туз
Ъ	Ы	Ь	Э	Ю	Я	Ө	Ү	Ң
♥ 6	♥ 7	♥ 8	♥ 9	♥ 10	♥ валет	♥ дама	♥ король	♥ туз

Таблица 11.1

Друзья Джека Воробья передали ему колоду, в которой карты были уложены следующим образом: ♣ дама ♠ 10 ♣ валет ♣ дама ♠ 9 ♣ 9 ♠ 6 ♠ туз ♥ 7 ♣ 7 ♦ 7 ♣ дама ♣ 10 ♣ король ♣ туз ♠ валет ♠ 10 ♠ 6 ♦ 7 ♠ валет ♣ 9 ♥ 8

Для того чтобы прочитать сообщение, Джек использовал таблицу 11.1 и прочитал:

♣дама	♠ 10	♣валет	♣дама	♠ 9	♣ 9	♠ 6	♠туз	♥ 7	♣ 7
О	Д	Н	О	Г	Л	А	З	Ы	Й

♦ 7	♣ дама	♣ 10
Т	О	М

♣ король	♣ туз	♠ валет	♠ 10	♠ 6	♦ 7	♠ валет	♣ 9	♥ 8
П	Р	Е	Д	А	Т	Е	Л	Ь

Упражнение 11.А.1

С. Прочитайте сообщение: ♣8 ♥7 ♣туз ♠9 ♥7 ♠туз ♦6 ♦7 ♠6 ♣валет.

Н. Прочитайте сообщение: ♣дама ♦король ♥10
♠король ♣валет ♠6 ♥валет ♦6 ♦7 ♣дама ♣9 ♣6 ♦валет ♠6.

11. А.2. Задача

Через некоторое время Джек Воробей получил следующую посылку, в которой были рыба и хлеб, завернутые в лист из школьной тетради по математике. Сообщение, которое было написано на этом листе, помогло Джеку бежать.

Конечно же, это сообщение тоже было зашифровано. На листе детским почерком было написано:

34 + 35 – 49 + 45 = 47 ***42 – 50 – 48 + 31 + 33 = 50***

36 + 35 – 26 – 21 = 19 ***31–19+33+45+37 – 24 – 41 = 39***

49 – 41 + 38 = 38 ***34–35– 46 + 39–30+ 34– 38 + 45= 36***

Те, кто просматривали посылку, не обратили внимание на математические упражнения, а Джек Воробей прочитал записку, пользуясь таблицей 11.2.

А	Б	В	Г	Д	Е	Е	Ж	З	И	Й	К
50	49	48	47	46	45	44	43	42	41	40	39
Л	М	Н	О	П	Р	С	Т	У	Ф	Х	Ц
38	37	36	35	34	33	32	31	30	29	28	27
Ч	Ш	Щ	Ъ	Ы	Ь	Э	Ю	Я	Ө	Ү	Ң
26	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15

Таблица 11.2

Давайте прочитаем его и мы:

34	35	49	45	47		42	50	48	31	33	50
П	О	Б	Е	Г		З	А	В	Т	Р	А

36	35	26	21	19		31	19	33	45	37	24	41	39
Н	О	Ч	Ь	Ю		Т	Ю	Р	Е	М	Щ	И	К

49	41	38	38		34	35	46	39	30	34	38	45	36
Б	И	Л	Л		П	О	Д	К	У	П	Л	Е	Н

Упражнение 11.А.2

С. 1) Прочитайте сообщение, используя таблицу 11.2:

36 + 50 – 33 + 22 = 36   32–22+33+46–50– 33 + 33 – 21= 18

2) Зашифруйте фразу Я ЛЮБЛЮ МАТЕМАТИКУ.

Н. 1) Прочитайте сообщение, используя таблицу 11.2:

48 + 50 – 38 + 45–33 – 41 = 40   26 – 39 + 50 + 38 – 35 = 48

2) Зашифруйте фразу ФРАНЦУЗСКИЕ ДУХИ.

11. А.3.Задача

Более сложные коды можно получить с помощью матриц.

Пример

Закодируем слово МАТЕМАТИКА следующим образом: Разделим все буквы предложения на пары (если число букв нечетно, добавим в конце букву Я), каждой букве сопоставим число, как в примере 11.А.2. и запишем каждую пару в виде матрицы–столбца:

$$\begin{pmatrix} М \\ А \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 37 \\ 50 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} Т \\ Е \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 31 \\ 45 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} М \\ А \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 37 \\ 50 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} Т \\ И \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 31 \\ 41 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} К \\ А \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 39 \\ 50 \end{pmatrix}.$$

Теперь с помощью матрицы порядка 2, имеющей обратную, пусть $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ преобразуем каждый столбец.

Тогда $A \cdot \begin{pmatrix} М & Т & М & Т & К \\ А & Е & А & И & А \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 37 & 31 & 37 & 31 & 39 \\ 50 & 45 & 50 & 41 & 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 224 & 197 & 224 & 185 & 228 \\ 137 & 121 & 137 & 113 & 139 \end{pmatrix}$$

Поэтому, закодированное слово МАТЕМАТИКА будет иметь вид 224 137 197 121 224 137 185 113 228 139.

Упражнение 11.А.3

С. Используя таблицу 11.2 и матрицу–ключ $A = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$ закодируйте слово БИШКЕК.

Н. Используя таблицу 11.2 и матрицу–ключ $A = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$ закодируйте слово ЛОНДОН.

11. А.4. Задача

Для раскодировки такого сообщения нужно представить каждую пару чисел в виде матрицы–столбца и умножить матрицу A^{-1} на каждый из них. После чего заменить полученные числа на буквы.

В нашем примере (см. **11.А.3.**) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Тогда,

$$A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 224 & 197 & 224 & 185 & 228 \\ 137 & 121 & 137 & 113 & 139 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 224 & 197 & 224 & 185 & 228 \\ 137 & 121 & 137 & 113 & 139 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 37 & 31 & 37 & 31 & 39 \\ 50 & 45 & 50 & 41 & 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} М & Т & М & Т & К \\ А & Е & А & И & А \end{pmatrix}.$$

Упражнение 11.А.4

1) Используя таблицу 11.2 и матрицу–ключ $A = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$ раскодируйте слово 504 411 508 422.

2) Используя таблицу 11.2 и матрицу–ключ $A = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$ раскодируйте слово 466 560 348 417.

11. А.5. Задача

Код получится более сложным, если мы будем разбивать предложения на группы их 3 или более букв. При этом качестве матрицы преобразователя нужно брать соответственно, матрицу порядка 3 или более, с определителем отличным от нуля. Если в последней группе не хватает букв, то можно договориться дополнять ее определенными буквами. Например, первыми буквами сообщения:

МАТЕМАТИКА $\Leftrightarrow$ МАТ ЕМА ТИК АМА.

Задача

Используя матрицу–ключ $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ и таблицу 11.3

прочитаем сообщение *46 57 41 29 32 34 14 37 13* на английском языке.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*	*13*
N	**O**	**P**	**Q**	**R**	**S**	**T**	**U**	**V**	**W**	**X**	**Y**	**Z**
14	*15*	*16*	*17*	*18*	*19*	*20*	*21*	*22*	*23*	*24*	*25*	*26*

Таблица 11.3

Процесс расшифровки начнем с нахождения обратной матрицы. Как было отмечено выше, могут быть использованы разные методы. В данном случае, мы используем метод KG. Нам предстоит решить три системы, матрица коэффициентов которых есть матрица ключ $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, а правыми частями являются столбцы единичной матрицы.

Начнем, с нахождения первого столбца обратной матрицы – с решения системы $\begin{cases} 2x + 0y + z = 1; \\ x + 3y + 0z = 0; \\ x - y + 2z = 0. \end{cases}$ Определитель матрицы коэффициентов системы $\Delta = 2 \cdot 6 - 1 \cdot 1 + 1(-3) = 8$.

Поменяв первый столбец матрицы коэффициентов на правую часть системы, получим, что соответствующий определитель равен *6*. Следовательно, *x = 6/8*.

Подставив найденное значение в два первых уравнения системы, и отбросив третье, получим *y= –2/8; z = –4/8*.

Далее, рассматривая системы с правыми частями $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, получим второй и третий столбцы обратной матрицы. Итак, $A^{-1} = \dfrac{1}{8}\begin{pmatrix} 6 & -1 & -3 \\ -2 & 3 & 1 \\ -4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$. Теперь, мы должны умножить обратную матрицу на матрицу, составленную из чисел шифровки и прочитать сообщение:

$$\frac{1}{8}\begin{pmatrix} 6 & -1 & -3 \\ -2 & 3 & 1 \\ -4 & 2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 46 & 29 & 14 \\ 57 & 32 & 37 \\ 41 & 34 & 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 - L & 5 - E & 1 - A \\ 15 - O & 9 - I & 12 - L \\ 22 - V & 19 - S & 12 - L \end{pmatrix}.$$

Упражнение 11.A.5

1) Используя таблицу 11.3 и матрицу–ключ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & 9 & 8 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ прочитайте сообщение на английском языке $55 \quad 221 \quad 46 \quad 84 \quad 345 \quad 45$.

2) Используя таблицу 11.3 и матрицу–ключ $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -7 \\ 6 & 7 & -14 \end{pmatrix}$, прочитайте сообщение на английском языке $3 \;\; -47 \;\; 89 \;\; 3 \;\; -21 \;\; 35$.

Итоговые упражнения

1. Закодируйте сообщение A SPY IN CITY, используя таблицу 11.3 и матрицу–ключ $\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$.

2. Закодируйте сообщение WE SHALL BREAK, используя таблицу 11.3 и матрицу–ключ $\begin{pmatrix} 7 & -8 & 3 \\ 4 & 5 & -5 \\ -3 & 0 & 8 \end{pmatrix}$.

3. Сообщение *–58 130 –89 241 –282 466* было закодировано с использованием матрицы $\begin{pmatrix} 11 & -27 \\ 5 & 19 \end{pmatrix}$ и таблицы 11.3. Декодируйте сообщение на английском языке.

4. Сообщение *419 497 489 582 469 572* было закодировано с использованием матрицы $\begin{pmatrix} 17 & 19 \\ 21 & 22 \end{pmatrix}$ и таблицы 11.3. Декодируйте сообщение на английском языке.

5. Сообщение *–10 –1 –10 44 44 –8* было закодировано с использованием матрицы $\begin{pmatrix} -2 & -1 & 11 \\ -1 & 0 & 7 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ и таблицы 11.3. Декодируйте сообщение на английском языке.

6. Сообщение *0 14 5 –20 47 –5* было закодировано с использованием матрицы $\begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ -4 & 5 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ и таблицы 11.3. Декодируйте сообщение на английском языке.

7. Сообщение *50 29 –20 69 63 8* было закодировано с использованием матрицы $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ и таблицы 11.3. Декодируйте сообщение на английском языке.

§12. ВВЕДЕНИЕ В ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ ПОДХОД

Линейное программирование позволяет, используя относительно простой математический аппарат, решать очень важные и интересные практические задачи. Эта особенность делает линейное программирование одним из ключевых пунктов обучения будущих экономистов, бизнесменов, … , умению моделировать различные жизненные ситуации.

Стоит отметить, что важнейший вклад в развитие теории линейного программирования был сделан советским ученным Л.Д. Канторовичем, отмеченным за эту работу Нобелевской премией по экономике (1975 год). Но как, часто это бывало, эти результаты в Советском Союзе мало использовались, зато получили свое развитие, и активно применяются в экономически развитых странах.

Выражение вида $a_1x_1 + a_2x_1 + ... + a_nx_n$, где $a_1,\ a_2,...,a_n$ — постоянные числа, называется линейным.

Задача на нахождение наибольшего (наименьшего) значения линейной функции в области, определяемой системой линейных уравнений и неравенств, называется задачей линейного программирования.

<u>Задача 1</u>

Магазин имеет 5 кг шоколадных конфет и 8кг карамели и продает эти конфеты в упаковках двух видов. Упаковка вида А содержат 100г шоколадных конфет и 400г карамели. Упаковка вида В содержит по 250г конфет обоих видов. Сколько упаковок каждого вида должен подготовить и продать магазин для того чтобы максимизировать прибыль, если упаковка вида А дает 7 сомов прибыли, упаковка вида В дает 4 сома прибыли?

Обозначив количество упаковок вида *A* через *x* и количество упаковок вида *B* через *y*, получаем возможность записать эту задачу на математическом языке:

$$\begin{cases} x \geq 0; \;\; y \geq 0; \\ 0{,}4x + 0{,}25y \leq 8; \\ 0{,}1x + 0{,}25y \leq 5; \\ Pf = 7x + 4y \rightarrow max. \end{cases}$$

Первые неравенства очевидны — количество упаковок не может быть отрицательным; 2–ое неравенство определяется ограничением на шоколадные конфеты, 3–тье — карамелью.

Задачу 1 можно решать двумя способами: геометрическим и алгебраическим.

Геометрический подход к решению задач линейного программирования отличается наглядностью, относительной простотой. К сожаленью, этот подход годится только для решения задач с двумя переменными. В тех случаях, когда имеют место более чем две переменные, приходится использовать алгебраический способ. Так как мы изучаем только вводные темы, в этом учебнике рассматривается только геометрический подход. Алгебраический подход можно изучить по более продвинутым уебникам.

12.1. Задача на максимум

С достаточным на то основанием, можно утверждать, что точка задаваемая уравнением $x = 5$ делит числовую ось на две полупрямые. Возможны возражения, заключающиеся в том, что не точка $x = 5$, а точка $x = 0$ делит числовую ось на полупрямые. Примем компромиссное заключение — и точка $x=5$, и точка $x=0$ делят числовую ось на полупрямые. Базой для этого заключения может служить тот факт, что в обоих случаях точки делят числовую ось на части, длина каждой части равна ∞.

Каждая полупрямая задается неравенством типа $x \geq 5$, в том смысле, что координата каждой точки принадлежащей полупрямой удовлетворяет неравенству.

Аналогично, мы говорим, что каждая прямая задаваемая уравнением $Ax + By = C$ делит плоскость на полуплоскости; каждая полуплоскость задается неравенством вида $Ax + By \geq C$ или $Ax + By \leq C$.

<u>Пример 1</u>

Для того чтобы определить полуплоскость задаваемую неравенством $2x+3y \le 12$, нужно нарисовать прямую $2x+3y = 12$.

Получатся две полуплоскости: одна из них задается неравенством $2x+3y \le 12$, другая — неравенством $2x+3y \ge 12$.

Для того чтобы выбрать нужную полуплоскость, достаточно взять одну определенную точку M и подставить ее координаты в исходное неравенство. Если мы получим верное неравенство, то точка M лежит в определяемом полупространстве, если же нет, то определяемым является противоположное полупространство. В качестве точки M мы рекомендуем брать точку $O(0, 0)$, если свободный член C отличен от нуля и точку на одной из осей координат, если $C = 0$.

Вернемся к нашему примеру. Подставим координаты точки $O(0, 0)$ в неравенство $2x+3y\le12$ и получим верное неравенство $2\cdot0+3\cdot0\le12$. Поэтому, из двух полуплоскостей нужно выбрать ту, в которой лежит точка О. На рисунке, мы рекомендуем, вычеркивать (заштриховывать) другую, не нужную полуплоскость.

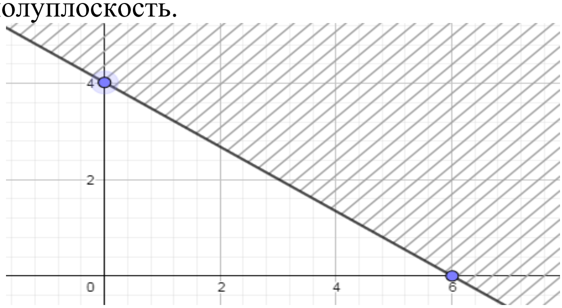


Рисунок 12.1

Решим задачу 1 геометрическим способом.

$$\begin{cases} x \ge 0; \;\; y \ge 0; \\ 0{,}4x + 0{,}25y \le 8; \\ 0{,}1x + 0{,}25y \le 5; \\ Pf = 7x + 4y \to max. \end{cases} \tag{12.1}$$

На графическом языке неравенства $x \ge 0$ и $y \ge 0$ говорят, что нужно рассматривать только первую четверть. Для того чтобы изобразить ограничение по шоколадным конфетам

$0{,}1x + 0{,}25y \le 5$, используем уравнение в отрезках: $0{,}1x+0{,}25y=5$ => $x/50 + y/20 = 1$.

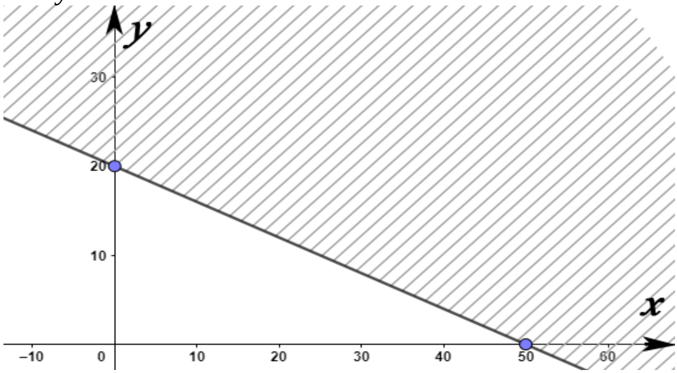


Рисунок 12.2

Ограничение по карамели $0{,}4x + 0{,}25y \le 8$ будет изображено следующим образом:

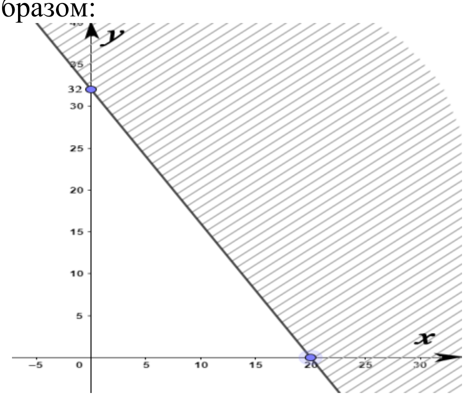


Рисунок 12.3

Объединим графики и получим четырехугольник *KLMO*.

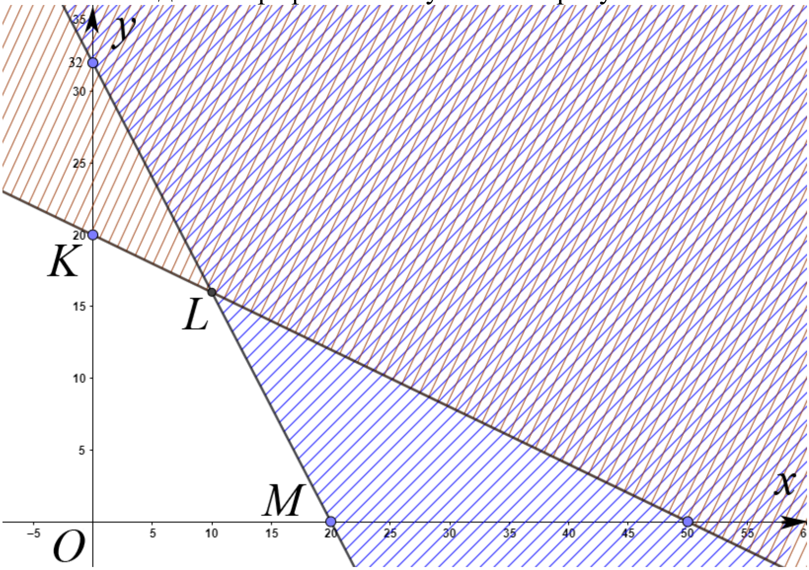


Рисунок 12.4

Каждая точка этого четырехугольника (ее координаты) показывает количество наборов вида *A* и *B*, которые может иметь магазин. Например, точка с координатами (*10, 10*) принадлежит *KLMO*. Это говорит о том, что имея 5 кг шоколадных конфет и 8 кг карамели магазин может приготовить по 10 упаковок вида *A* и *B*. В то же время точка (*10, 20*) не лежит в *KLMO*, говоря о том, что одновременно подготовить 10 упаковок вида *A* и 20 вида *B* невозможно. В связи с этим, резонно назвать *KLMO* областью допустимых значений.

В дальнейшем будет важно знать координаты точки *L*. Их можно найти, решив систему: $\begin{cases} 0{,}4x + 0{,}25y = 8; \\ 0{,}1x + 0{,}25y = 5; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10; \\ y = 16. \end{cases}$

Итак, магазин имеет возможность изготовить большое количество различных наборов из пакетов вида *A* и *B*. Далее, мы будем говорить, о том, как найти набор, обеспечивающий наибольшую прибыль. Общая прибыль задается функцией $Pf = 7x + 4y$, которая называется целевой функцией. Приравняв *Pf* к нулю, получаем прямую $7x + 4y = 0$, проходящую через начало координат. С ростом значения Pf прямая будет смещаться параллельно себе вправо вверх. К примеру, при $Pf = 84$ имеем прямую линию, проходящую через точки $(0, 21)$ и $(12, 0)$.

Область допустимых значений содержит точки, лежащие правее и выше, то есть имеются наборы, обеспечивающие более высокие прибыли. Продолжая, в таком же духе приходим к основной теореме теории линейного программирования:

Теорема

Целевая функция достигает максимума (минимума) в одной из вершин многоугольника, описывающего область допустимых значений.

Доказательство теоремы можно найти в специальной литературе, посвященной линейному программированию.

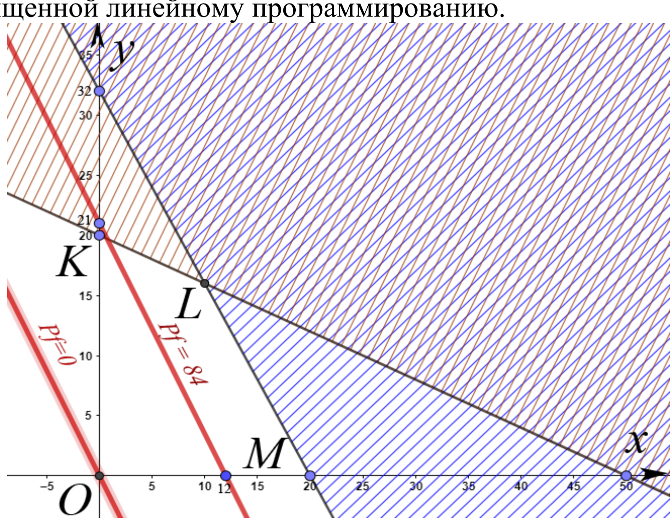


Рисунок 12.5

Из теоремы следует, что магазин получит максимальную прибыль, изготовив и продав набор соответствующий одной из следующих точек: $K(0, 20)$, $L(10, 16)$, $M(20, 0)$. Для того чтобы определиться, достаточно вычислить значения целевой функции $Pf = 7x + 4y$ в этих точках: $Pf(K) = Pf(0, 20) = 7 \cdot 0 + 4 \cdot 20 = 80;$

$$Pf(L) = Pf(10, 16) = 7 \cdot 10 + 4 \cdot 16 = 134;$$

$$Pf(M) = Pf(20, 0) = 7 \cdot 20 + 4 \cdot 0 = 140.$$

Следовательно, магазин получит максимальную прибыль равную 140 сомам, если изготовит и продаст 20 наборов вида *A*.

Задача 1а

Если при прочих равных условиях прибыль с одной упаковки вида *A* составит \$5 вместо \$7, то целевая функция $Pf = 5x + 4y$ достигнет максимума в точке *(10, 16)*, потому что

$Pf(K) = Pf(0, 20) = 5\cdot 0 + 4\cdot 20 = 80;$

$Pf(L) = Pf(10, 16) = 5\cdot 10 + 4\cdot 16 = 114;$

$Pf(M) = Pf(20, 0) = 5\cdot 20 + 4\cdot 0 = 100.$

Это означает, что для максимизации прибыли магазин должен продать 10 наборов вида *A* и 16 наборов вида *B*.

Упражнение 12.1

С. Ювелирная фирма может изготавливать два вида браслетов из 672 граммов золота и 864 граммов серебра, затратив 2700 рабочих часов. Браслет А требует 8 г золота, 9 г серебра и 30 рабочих часов; браслет В требует 12 г золота, 18 г серебра и 60 рабочих часов. Как максимизировать общую прибыль, если известно, что один браслет вида А дает прибыль \$320, а браслет вида В дает прибыль \$576?

Н. Фирма производит два вида водных лыж: для прыжков и для слалома. Соответствующие данные приведены в таблице:

Цех	Рабочие часы на одни лыжи		Максимально возможное количество рабочих часов
	Для прыжков	Для слалома	
Сборочный	6	4	108
Отделочный	1,2	1	24

Как максимизировать общую прибыль, если известно, что один комплект лыж для прыжков дает прибыль \$35, а один комплект слаломных лыж — прибыль \$28?

12.2. Задача на минимум

Для улучшения качества дизельного топлива используются различные добавки. В частности, каждая тонна топлива марки "Альфа" должна содержать не менее 40 мг добавки X, не менее 14 мг добавки У и не менее 18 мг – Z. Эти добавки содержатся в продуктах A и B. Содержание добавок в каждом литре продукта приведено в таблице:

	X	Y	Z
A	4	2	3
B	5	1	1

Требуется найти набор продуктов А и В, минимизирующий стоимость добавок, если 1 л А стоит 50 сомов, 1 л В стоит 60 сомов.

Перепишем задачу на математическом языке, обозначив через a и b литры подуктов А и В:
$$\begin{cases} a \geq 0;\ b \geq 0; \\ 4a + 5b \geq 40; \\ 2a + b \geq 14; \\ 3a + b \geq 18; \\ C = 50a + 60b \to min. \end{cases}$$

Область допустимых значений задачи на графике выглядит следующим образом.

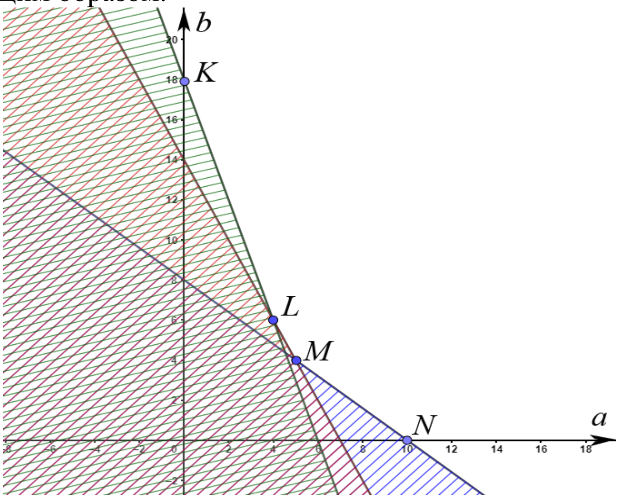


Рисунок 12.6

Отметим, что для того, чтобы провести прямые ограничивающие область допустимых значений, удобно пользоваться записью в виде уравнения в отрезках. ($4a + 5b = 40$ переписать как $a/10 + b/8 = 1$ и так далее).

Из теоремы (см. предыдущий пункт) следует, что целевая функция $C = 50a + 60b$ достигает своего минимума в одной из угловых точек: *K, L, M, N*. Из построений следует, что точка *K* имеет координаты (0, 18), точка *N*(10, 0). Для нахождения координат точек *L* и *M* решим системы уравнений, описывающих прямые, на пересечении которых лежат эти точки.

L: $\begin{cases} 2a + b = 14; \\ 3a + b = 18; \end{cases} <=> \begin{cases} a = 4; \\ b = 6. \end{cases}$ M: $\begin{cases} 4a + 5b = 40; \\ 2a + b = 14; \end{cases} <=> \begin{cases} a = 5; \\ b = 4. \end{cases}$

Для завершения процесса решения задачи осталось вычислить значения целевой функции в угловых точках:

$C(K) = 50\cdot 0 + 60\cdot 18 = 1080;$ $C(L) = 50\cdot 4 + 60\cdot 6 = 560;$

$C(M) = 50\cdot 5 + 60\cdot 4 = 490;$ $C(N) = 50\cdot 10 + 60\cdot 0 = 500.$

Итак, для получения тонны топлива марки “Альфа” достаточно затратить 490 сомов, использовав 5 литров продукта *A* и 4 литра *B*.

Кроме ответа на поставленный в условиях задачи вопрос, анализируя процесс решения задачи можно получить много другой полезной информации. В частности, оптимальная точка – точка *M* определяется требованиями к добавкам *X* и *У*. Это означает, что по добавке *Z* имеется резерв: $3\cdot 5 + 4 = 19$. То есть, по требованиям к марке “Альфа” достаточно иметь 18 единиц добавки *Z*, а мы собираемся добавлять 19 единиц.

Упражнение 12.2.

С. Для того чтобы улучшить качество моторного масла к одной тонне масла нужно добавить не менее 165 единиц вещества H и 110 единиц вещества M. Для этого можно применять упаковки смеси X, каждая из которых содержит 10 единиц H, 5 единиц M, и стоит 10 сомов, и упаковки смеси Y с соответствующими данными: 11, 11 и 17 сомов. Как улучшить качество масла затратив минимум денег?

Н. Пациент больницы должен ежедневно принимать не менее 84 единиц витамина A, 120 единиц витамина B и 100 единиц витамина D. Каждая порция смеси M содержит 10 единиц витамина A, 8 единиц витамина B и 5 единиц витамина D, а каждая порция смеси N содержит 2 единицы витамина A,
4 единицы витамина B и 5 единиц витамина D. Какое минимальное количество денег нужно истратить, для того чтобы выполнить предписание пациенту, если порция M стоит \$0,7, порция N стоит \$0,3?

12.3. Транспортная задача

Фирма имеет 400 коробок с товаром на 1–ом складе и 500 на 2–ом. 350 из них надо доставить в магазин А, 300 в магазин Б. Сколько коробок должно быть доставлено с каждого склада в каждый магазин для того чтобы минимизировать транспортные расходы, если доставка одной коробки со склада 1 в магазин А стоит 2,5 сома; из 1 в Б – 1,5 сома; из 2 в А – 2 сома; из 2 в Б – 1,8 сома?

Для начала удобно представить данные в виде таблицы:

	Магазин А	Магазин Б	Запасы
1 склад	*2,5*	*1,5*	*400*
2 склад	*2*	*1,8*	*500*
Требования	*350*	*300*	

Обозначим через x число коробок, доставляемых из 1 в A; через y – из 1 в $Б$. Тогда, $350-x$ — количество коробок доставляемых из 1 в A; $300-y$ — из 2 в $Б$.

В результате имеем задачу

$$\begin{cases} x \ge 0;\ \ y \ge 0;\ \ 350 - x \ge 0;\ \ 300 - y \ge 0; \\ x + y \le 400;\ \ (350 - x) + (300 - y) \le 500; \\ C = 2{,}5x + 1{,}5y + 2(350 - x) + 1{,}8(300 - y) \to min. \end{cases}$$

Приведя подобные члены, получим следующие условия:

$$\begin{cases} x \ge 0;\ \ y \ge 0;\ \ x \le 350;\ \ y \le 300; \\ x + y \le 400;\ \ x + y \ge 150; \\ C = 0{,}5x - 0{,}3y + 1240 \to min. \end{cases}$$

Из вида функции C следует, что для достижения минимума нужна точка с малым значением x и большим y.

В области допустимых значений, многоугольнике KLMNST (см. рис. 12.7), наименьшее значение x и наибольшее y имеет точка K — точка ($0;\ 300$). Следовательно, минимум транспортных издержек равен $C(K)=0{,}5\cdot 0–0{,}3\cdot 300+1240 = \$1150$. Он будет достигнут при следующем плане перевозок:

	Магазин А	Магазин Б
1 склад	*0*	*300*
2 склад	*350*	*0*

Нарисуем область допустимых значений:

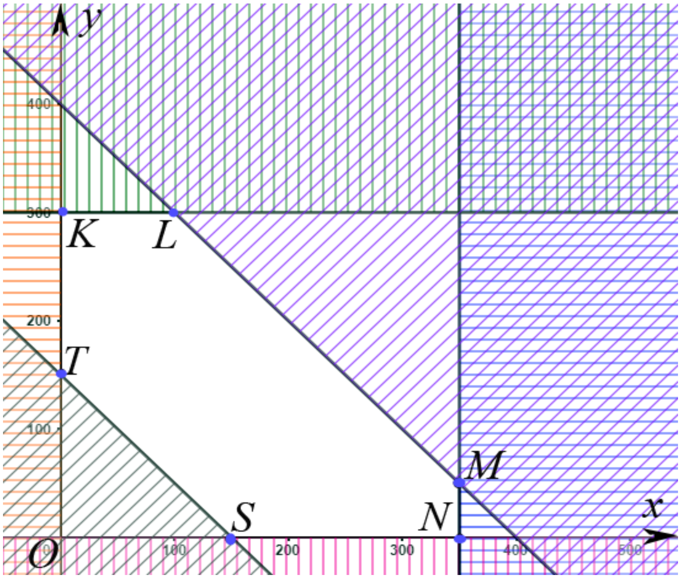


Рисунок 12.7

Упражнение 12.3.

С. Со складов K и L нужно доставить 120 телевизоров в магазин A и 70 телевизоров в магазин B. На складе K содержится 140 телевизоров и на складе L содержится 90 телевизоров. Затраты на перевозку одного телевизора равны: \$8 из K в A; \$6 из K в B; \$7 из L в A; \$9 из L в B. Как осуществить перевозки, затратив минимум денег?

Н. Со складов K и L нужно доставить 320 мешков в магазин A и 210 мешков в магазин B. Как осуществить перевозки, затратив минимум денег, если на каждом складе 280 мешков, а затраты на перевозку одного мешка задаются таблицей:

	A	B
K	*2*	*3*
L	*1*	*1,6*

12.4. Замкнутая транспортная задача

Дополним условия транспортной задачи: *Оставшиеся на складах 250 телевизоров должны быть доставлены в магазин B. Как теперь должен выглядеть план поставок, если известно,* *что доставка одного телевизора в магазин В со склада 1 стоит 3 сома, со склада 2 стоит 2,4 сома?*

Таблица транспортных расходов принимает вид:

	А	**Б**	**В**	**Запасы**
1 склад	*2,5*	*1,5*	*3*	400
2 склад	*2*	*1,8*	*2,4*	500
Требования	*350*	*300*	*250*	

Особенность этой задачи в том, что объем запасов $400+500=900$ совпадает с объемом поставок $350+300+250 = 900$.

Поэтому, несмотря на появление магазина В, нет необходимости вводить новую переменную. Такие задачи называются замкнутыми.

Количество телевизоров доставляемых со склада 1 в магазин *В* обозначим через $400 – x – y$, со склада 2 в магазин *В* — через $500 – (350 – x) – (300 – y) = x + y – 150$.

Ограничения, соответствующие замкнутой транспортной задаче, заключаются в требовании неотрицательности количества товара, перевозимого с каждого склада в каждый магазин: $400 – x – y \geq 0$; $x + y –150 \geq 0$.

Функция издержек после приведения подобных членов:

$$C = 2{,}5x + 1{,}5y + 3(400 – x –y) + 2(350 – x) + +1{,}8(300 – y) + 2{,}4(x + y – 150) = – 0{,}1x – 0{,}9y + 2080.$$

Важно отметить – область допустимых значений не изменилась.

Теория говорит о том, что минимум будет достигнут в одной из угловых точек; коэффициенты целевой функции – о том, что надо выбирать точки с самыми большими значениями x и y, то есть это точка *L* или точка *M*. Значения целевой функции в этих точках: $C(L) = –0{,}1·100 – 0{,}9·300 + 2080 = \$1800$;

$C(M) = –0{,}1·350 – 0{,}9·50 + 2080 = \$2000$

Ответ Осуществляя перевозки по плану

	Магазин А	Магазин Б	Магазин В
1 склад	*100*	*300*	*0*
2 склад	*250*	*0*	*250*

фирма будет иметь минимальные транспортные расходы равные 1800 сомов.

Упражнение 12.4.

С. С хлебозаводов А и В 8 тонн хлебопродуктов доставляется в город K, 12 тонн в город L, 12 тонн в город M. Как осуществить перевозки, затратив минимум денег, если на хлебозаводе А выпекается 16 тонн хлебопродуктов; на В — 16 тонн, а затраты на перевозку одной тонны хлебопродуктов задаются таблицей:

	K	L	M
A	*19,5*	*18*	*19*
B	*18*	*19*	*18*

Н. Со складов А и В 110 тонн продуктов должны быть перевезены в город K, 120 тонн в город N, 150 тонн в город M. Как осуществить перевозки, затратив минимум денег, если на складе А имеется 120 тонн, на складе В имеется 260 тонн, а затраты на перевозку одной тонны продуктов задаются таблицей:

	K	L	M
A	*11*	*12*	*10*
B	*9*	*11*	*8*

Итоговые упражнения

1. Фирма производит два вида каши. Основные ограничения накладываемые на выпуск продукции – наличие месячного фонда рабочего времени в каждом из трёх цехов фабрики: 1000 часов в цехе А, 360 часов в цехе В, 600 в цехе С. Число человеко–часов требуемое для производства 1ц продукта задаётся таблицей:

	цех А	цех В	цех С
1 каша	10	3	2
2 каша	4	2	4

Сколько центнеров каждой каши нужно произвести, для того чтобы максимизировать прибыль, если 1 ц первой каши приносит 500 сомов прибыли, 1 ц второй каши приносит 600 сомов?

1а. Фирма производит два вида каши. Основные ограничения накладываемые на выпуск продукции – наличие месячного фонда рабочего времени в каждом из трёх цехов фабрики: 1000 часов в цехе А, 360 в цехе В, 1200 в цехе С. Число человеко–часов требуемое для производства 1ц продукта задаётся таблицей:

	цех A	цех B	цех C
1 каша	10	3	2
2 каша	4	2	4

Сколько центнеров каждой каши нужно произвести, для того чтобы максимизировать прибыль, если 1центнер первой каши приносит 500 сомов, 1 центнер второй каши приносит 300 сомов?

2. Фирма производит два типа телевизоров. Телевизор 1–го типа требует 6 часов на сборку, 3 часа на настройку и 2 часа на проверку. Телевизор 2–го типа, соответственно: 5; 5; 1ч. Сколько телевизоров каждого типа нужно произвести, для того чтобы получить максимальную прибыль, если телевизор 1–го типа приносит $40 прибыли, 2–го – $50? Известно, что при сборке можно использовать 900 часов, при настройке 600 часов, при проверке – 280 часов, а по договору с магазином нужно произвести не менее 20 телевизоров 1–го типа и 40 телевизоров 2–го типа.

3. Фирма САН производит два вида телевизоров. Каждый телевизор марки X требует 6 часов на сборку и 1 час на упаковку и приносит $90 прибыли. Каждый телевизор марки У требует 10 часов на сборку и 1 час на упаковку и приносит $160 прибыли. Сколько телевизоров каждого вида должна производить фирма САН, для того чтобы максимизировать прибыль, если фирма может использовать 780 часов на сборку и 110 на упаковку?

Спустя некоторое время у фирмы САН, помимо сборки и упаковки, возникла необходимость производить настройку. Для настройки телевизора марки X требуется 2 часа, телевизора марки Н требуется 5 часов, а всего имеется 340 часов. Сколько телевизоров каждого вида теперь должна производить фирма САН, для того чтобы максимизировать прибыль?

На третьем этапе выяснилось, что фирма может продать не более 39 телевизоров марки У. Чему равен максимально возможный уровень прибыли в этом случае?

4. В корме для цыплят ежедневно должно содержаться не менее 2600 единиц витамина *А* и 2000 единиц витамина *Д*. Пищевая добавка АЙ содержит 30 единиц витамина *А* и 20 единиц витамина *Д* и стоит 5 сомов. Соответствующие данные по добавке СУЛУУ: 20, 40 и 3 сома. Как удовлетворить требованиям, затратив минимум денег?

5. Для улучшения качества дизельного топлива в него добавляют химикаты. В тонну дизельного топлива должно быть добавлено не менее 40 мг добавки X, не менее 14 мг добавки Y и не менее 18 мг Z. Эти добавки содержатся в продуктах A и B. Содержание добавок в каждом литре продукта приведено в таблице (в мг):

	X	Y	Z
A	4	2	3
B	5	1	2

Найти набор продуктов A и B минимизирующий стоимость добавок, если:

a) 1 л продукта A стоит 50 сомов, 1 л продукта B стоит 20 сомов;

b) 1 л продукта A стоит 45 сомов, 1 л продукта B стоит 30 сомов.

6. Фирма производит прохладительные напитки на двух заводах: A и B. Поставкой на заводы занимаются фирмы P и T. На декабрь заводу A требуется 4000 а заводу B 3500 бутылок. Фирма P может поставить не более 7500, а фирма T – 4000 бутылок. Информация о стоимости перевозки одной бутылки от каждого поставщика каждому заводу приведена в таблице (в центах):

	A	B
P	4	2,5
T	3	2

Как организовать доставку бутылок на заводы, так чтобы общая стоимость перевозок была минимальной?

6а. Фирма производит прохладительные напитки на заводах A и B. Поставкой на заводы занимаются фирмы P и T. На декабрь заводу A требуется 4000 а заводу B 3500 бутылок. Фирма P может поставить не более 4500, а фирма T – 4000 бутылок. Стоимость перевозки одной бутылки приведена в таблице (в центах):

	A	B
P	2,5	2,5
T	3	2

Как организовать доставку бутылок на заводы, так чтобы общая стоимость перевозок была минимальной?

7. Каким образом должна быть организована доставка, если в условиях задачи 6 появится завод С, которому требуется 4000 бутылок, если первозка с фирмы Р стоит 2 цента, с фирмы Т – 4?

7а. Каким образом должна быть организована доставка, если в условиях задачи 6а появится завод С, которому требуется 1000 бутылок, а стоимость доставки с фирмы Р равна 2 центам, с фирмы Т – 4 ?

8. Со складов R и S в магазин А должны доставить 200 мешков, в магазин Б – 500. Каков минимум транспортных издержек, если на складе R 550 мешков, на складе S 400 мешков, а расходы по доставке одного мешка задаются таблицей:

	А	Б
R	2	3
S	1	1,5

9. Со складов K и L в магазин А должны доставить 500 мешков, в Б –100, в С–200. Чему равен минимум транспортных издержек, если на каждом складе по 400 мешков, а расходы по доставке одного мешка задаются таблицей:

	А	Б	С
K	20	17	10
L	23	12	12

10. Найти максимум и минимум функции $z = 5x + 2y$ при ограничениях $3y - 2x \ge 0$, $y + 8x \le 52$, $y - 2x \le 2$, $y \ge 0$, $x \ge 3$.

11. Найдите значения $x \ge 0$ и $y \ge 0$ которые минимизируют функцию $C = 3x + 2y$ при ограничениях:

a) $10x + 7y \le 42$, $4x + 10y \ge 35$.

b) $6x + 5y \ge 25$, $2x + 6y \ge 15$.

c) $x + 2y \ge 10$, $2x + y \ge 12$, $x - y \le 8$.

12. Найти максимум функции $z = 7x + 9y$ при ограничениях: $x \ge 0$, $y \ge 0$, $y + 2x \le 10$, $3y + 5x \le 26$.

13. Найти минимум функции $z = 3x + 6y$ при ограничениях: $x \ge 0$, $y \ge 0$, $x + y \le 20$, $3x + y \ge 15$, $x + 2y \ge 15$.

14. Найти максимум и минимум функции $z = 5x + 8y$ при ограничениях: $x \ge 1$, $y \ge 2$, $x + 2y \le 20$, $3x + y \le 15$, $x + y \ge 7$.

15. Найти максимум функции $z = 6x + 4y$ при ограничениях: $x \ge 0$; $y \ge 0$; $1{,}2x + 0{,}6y \le 960$; $0{,}04x + 0{,}03y \le 36$; $0{,}2x + 0{,}3y \le 270$.

Изучив вышеизложенные темы, студенты АУЦА, в целом, заканчивают первый семестр. В разные годы могут добавляться или убираться какие–то темы. Для оценки уровня усвоения курса нужно написать контрольную работу. Далее приводится образец такой работы.

Демонстрационный вариант финальной контрольной работы, осень – 2020

I. Красная Шапочка может добраться до бабушки преодолев три участка пути. Первый ведет к дому дровосеков. Его длина ***a*** метров. Второй, длиной ***b*** метров, ведет от дома лесорубов к убежищу Волка. Третий участок пути приводит от убежища Волка в бабушкин дом. Его длина ***c*** метров. Когда Красная Шапочка спросила о длине этих дорожек, ее мать, преподающая математику, сказала, что если из ***2a*** вычесть ***4b*** и прибавить к результату ***c***, то получится 100 метров. В то же время, если вычесть ***a*** из ***8b*** и прибавить ***2c,*** получится 3000 метров, а если ***3a*** сложить с ***5b*** и ***6c***, то получится 5700 метров. Когда Красная Шапочка пришла и рассказала об этом бабушке, она сказала, что главный лесничий Эль'Аман любит ремонтировать дорожки. Поэтому, месяц назад вместо чисел 100, 3000 и 5700 были числа 700, 2100 и 5500, а два месяца назад: 200, 2700 и 5400. Помогите Красной Шапочке определить длину путей в каждом месяце.

II. Затраты фирмы на производство 18 единиц продукции составили 2140 сом, 26 единиц продукции — 2890 сомов. Выручка от реализации 22 единиц товара составила 2460,7 сома. Предполагая, что имеет место линейная зависимость, и найдите точку безубыточности.

III. Компания производит два вида торта. Выпечка торта первого вида занимает 40 минут, второго — 24 минуты; покрытие кремом торта первого вида требует 15 минут, второго — 18 минут. Как получить максимальную прибыль, если на выпечку можно выделить не более 80 часов; на покрытие кремом не более 45 часов; тортов второго вида можно продать не более 120 штук; первый торт стоит 2 доллара, второй — 2,5 доллара?

IV. В суточной дозе корма для цыплят должно содержаться не менее 120 единиц витамина A, 52 — витамина B и 84 — витамина D. Порция пищевой добавки K содержит 8 единиц витамина A, 3 единицы витамина B, 10 единиц витамина D и стоит 2,2 доллара. Соответствующие данные для пищевой добавки S: 4; 2; 2 и 1 доллар. Как выполнить требования, потратив минимум денег?

V. Из молочных заводов A и B в города K, L и M нужно доставить 4, 6 и 5 тонн молока соответственно. Как организовать доставку молока в города, так чтобы общая стоимость перевозок была минимальной, если завод A производит 6,5 тонны молока, Б — 8,5 тонны, а стоимость перевозки одной тонны указана в таблице:

	K	L	M
A	120	140	110
B	140	155	130

VI. Со складов K и L в магазин A необходимо доставить 220 мешков, а в магазин B 310 мешков. Как минимизировать транспортные расходы, если на каждом складе имеется 300 мешков? Стоимость доставки одного мешка указана в таблице:

	A	B
K	*22*	*30*
L	*10*	*12*

VII. Расшифруйте сообщение на английском языке

128 –14 65 118 –12 61 22 –37 2, при кодировке которого использовалось соответствие

A	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**	**H**	**I**	**J**	**K**	**L**	**M**
1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*	*13*
N	**O**	**P**	**Q**	**R**	**S**	**T**	**U**	**V**	**W**	**X**	**Y**	**Z**
14	*15*	*16*	*17*	*18*	*19*	*20*	*21*	*22*	*23*	*24*	*25*	*26*

и матрица–ключ $\begin{pmatrix} 3 & 5 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

VIII. Фирма A продала 30% своей продукции в Бишкеке, 50% — в Алматы и 20% — в Токмаке. Аналогичные данные о фирме B: 50%, 30%, 20%; фирме C: 35%, 20%, 45%. Сколько единиц товара было произведено на каждой фирме, если потребители Бишкека получили 94 единицы, потребители Алматы получили 78 единиц, потребители Токмака получили 68 единиц товара.

IX. Затраты на подготовку к выпуску и продажу нового вида продукции 13960 долларов. Нарисуйте график и определите зону прибыли, зная, что средние переменные затраты для первых 500 единиц составляют 9,1 доллара для последующих 7,5 долларов, а цена (в долларах) равна a) *41,1*; b) *28*; c) $64 - 0{,}05q$.

X. Даны точки *A(–1, 4), B(–4, 1), C(5, –2), D(7, 5)*. Найти:

a) угол между векторами AB и AC;

b) угол между векторами AB и AD;

c) площадь четырехугольника ABCD;

d) координаты точки K — вершины параллелограмма ABCK;

e) уравнение прямой CL, параллельной прямой AB;

f) уравнение прямой DP, перпендикулярной прямой BC.

XI. Исследуйте систему на разрешимость и для каждого случая выпишите решение: a) $\begin{cases} 5x + (7 - a)y = 10, \\ ax + 2y = 4. \end{cases}$ b) $\begin{cases} 7x + 11y - 5z = a, \\ 4x + 5y = 17, \\ 10x + 17y - 10z = 21. \end{cases}$

ПРИЛОЖЕНИЕ А1. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О КЛАДЕ ПИФАГОРА

В завещании Пифагора было указано, что он закопал 1400 золотых монет, по 100 в каждой вершине прямоугольника. На первую вершину можно попасть, сделав 20 шагов на запад от старого колодца, на вторую — сделав 28 шагов на восток и 36 шагов на север. При этом ширина прямоугольника равна 3/4 длины. Наследники решили, что имела место опечатка — в четырех вершинах прямоугольника может быть только 400 монет и предлагают купить права на клады Пифагора за 1000 золотых монет, говоря, что 400 монет самого Пифагора стоят таких денег. Согласны ли Вы на покупку? Проясните ситуацию и укажите точек, в которых закопаны монеты.

Для того чтобы упростить рассмотрения, стоит воспользоваться декартовой системой координат, совместив начало координат со старым колодцем.

Тогда, два первых клада расположены в точках *A(–20; 0)* и *B(28; 36)*, остальные, по мнению наследников, в точках *C* и *D*, при этом *AB* – длина прямоугольника. Определим их координаты.

Третий клад найдем из следующих соображений: он расположен в вершине *C* вектора *BC*; перпендикулярен вектору *AB;* имеет длину равную *3/4* длины *AB*.

Переведем эти соображения на язык математики. Для этого, во–первых, вспомним о том, что при умножении координат вектора на число *k*, длина вектора умножится на *k*.
Во–вторых, нужно принять во внимание то, что координаты перпендикулярного вектора можно получить, поменяв местами координаты исходного и знак одной из координат.

Начнем с координат вектора *AB: (28 – (–20); 36 – 0)) = (48; 36).* Тогда, вектор *BC* имеет координаты (*3/4*)(*–36; 48*) = (*–27; 36*) и, следовательно, координаты точки *C* получатся, если приставить *BC* к *B*: *(28, 36) + (–27; 36) = (1, 72).*
Координаты точки *D* найдем, приставив вектор *DA*, который совпадает с *BC*, к точке *A*: *(–20, 0) + (–27; 36) = (–47, 36).*

Итак, получились четыре вершины, в которых закопаны 400 монет. Но, в отличие от наследников, полезно знать, что наряду с вектором *BC*, перпендикулярным к *BA*, является и вектор, противоположный к *BC* — вектор *BE*, с координатами *(27; –36)*. Это означает, что точки *A* и *B* являются вершинами не только прямоугольника *ADCB*, но и прямоугольника *ABEF*.

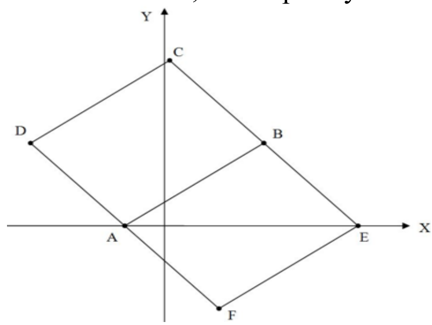


Рисунок А1.1

Таким образом, приставив вектор *BE* к точке *B*, и равный ему вектор *FA*, к точке *A*, найдем координаты еще двух кладов:
(28, 36) + (27; –36) = (55, 0);   (–20, 0) + (27; –36) = (7, –36).

Итак, мы нашли 6 кладов, в которых содержится 600 монет. Итак, приобретение прав на клад Пифагора становится привлекательнее.

Затраты на приобретение прав можно полностью покрыть, сообразив, что сторона *AB* не обязана быть большей, она может быть и меньшей: то есть ее длина может составлять *3/4* длин прилегающих сторон.

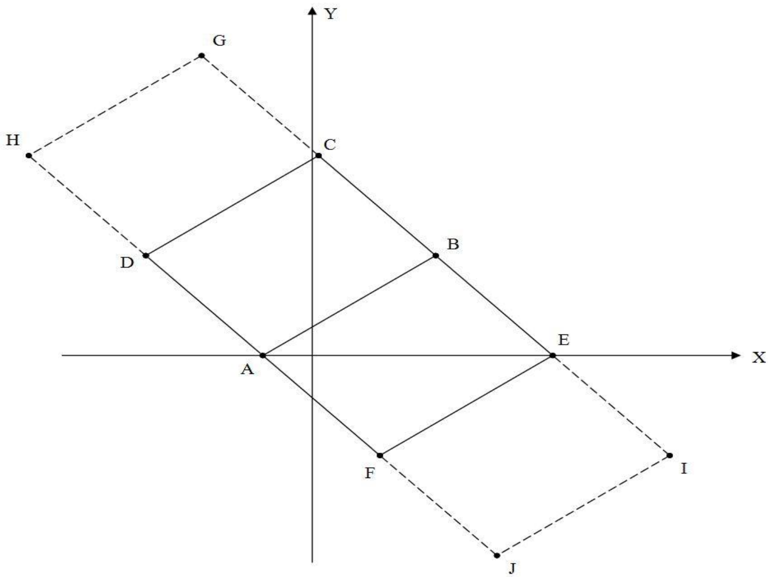


Рисунок А1.2

Поэтому, вектора (*4/3*)(*–36; 48*) = (*–48; 64*) и (*4/3*)(*36; –48*) = (*48; –64*) позволяют определить еще 4 вершины:

(28, 36) + (–48; 64) = (–20, 100); (–20, 0) + (–48; 64) = (–68, 64).

(28, 36) + (48; –64) = (76, –28); (–20, 0) + (48; –64) = (28, –64).

Поразмыслив еще немного, можно сообразить, что точки *A* и *B* не обязаны быть соседними вершинами прямоугольника — они могут быть и противоположными. Тогда AB может быть диагональю двух прямоугольников, и соответственно, имеются еще 4 клада.

Пусть (*x, y*) координаты искомой вершины.

Тогда, вектора *(28 –x; 36 – y)* и *(–20 – x; –y)* будут сторонами прямоугольника. Из условий их перпендикулярности и соотношения между длинами сторон получим уравнения для определения x и y:

$(3/4)(28-x;\ 36-y)=(-y;\ 20+x)$, $(3/4)(28-x;\ 36-y)=(y;\ -20-x)$,
$(28-x;\ 36-y)=(3/4)(-y;\ 20+x)$, $(28-x;\ 36-y)=(3/4)(y;\ -20-x)$.

Перепишем 1–ое из них в виде системы и определим координаты 11–го клада:

$$\begin{cases} (3/4)(28-x)=-y; \\ (3/4)(36-y)=20+x; \end{cases} <=> \begin{cases} 0{,}75x-y=21; \\ x+0{,}75y=7; \end{cases} <=> \begin{cases} x=14{,}56; \\ y=-10{,}08; \end{cases}$$

Также, можно определить месторасположение 12– го, 13–го и 14–го кладов. Это точки с координатами (-20, 36), (28, 0), ($-8{,}48$, $48{,}64$)

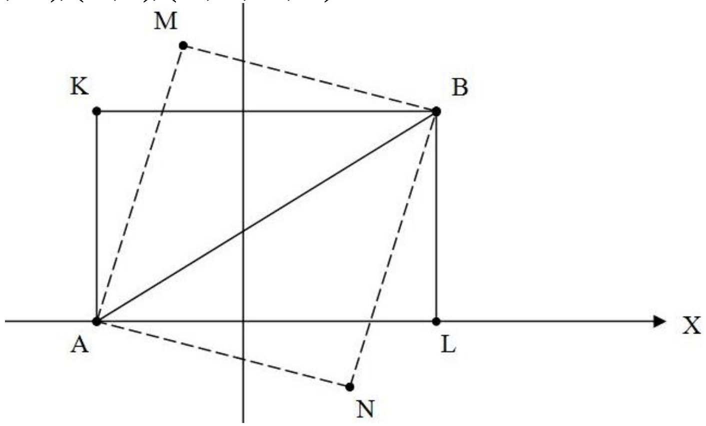


Рисунок А1.3

Итак, получается, что приобретение прав на клады Пифагора оказывается не только престижным, но и весьма выгодным делом: можно получить 1400 золотых монет, затратив 1000 монет и какое–то количество умственной энергии.

ПРИЛОЖЕНИЕ А2. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ КООРДИНАТНОГО ПОДХОДА

Расшифровав древнюю запись, ученые определили, что цитадель «Багынбас» была построена в форме ромба, одна из вершин которого была расположена в 5 стадиях (stadium древнеримская или греческая мера длины, около 185 метров) к северу и 5 стадиях к востоку от большого колодца. Центр крепости располагался в 1 стадии к северу и 2 стадиях к востоку от большого колодца. По этим данным ученые определили местонахождение другой вершины и уравнение линии, на которой располагались остальные вершины. Затем, в результате дополнительного исследования, они определили, что длина стены составляла 13 стадий. Помогите ученым определить координаты других вершин и площадь цитадели.

Давайте рассмотрим систему координат с начале которой будет большой колодец:

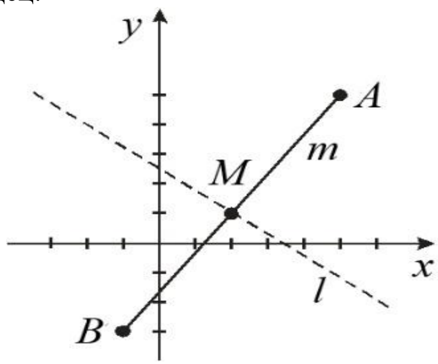


Рисунок А2.1

Вершина А и центр цитадели М расположены на прямой ***m***, уравнение в которую можно записать разными способами. В частности, чтобы записать ее в виде линейной функции, запишем ее в виде $y = kx + b$, затем подставив координаты точек А и М, получим систему, определим значения коэффициентов k и b:

$\begin{cases} 5 = k5 + b; \\ 1 = k2 + b. \end{cases}$ Решив систему, получим уравнение m: $y = \frac{4}{3}x - \frac{5}{3}$.

Длина отрезка MA равна $|MA| = \sqrt{(5-2)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{25} = 5$. Тогда, зная, что вершина B находится на прямой ***m***, а длина отрезка BM равна длине MA, мы получим систему уравнений для определения координат точки B:

$$\begin{cases} (x_B - 2)^2 + (y_B - 1)^2 = 5^2; \\ y_B = \dfrac{4}{3}x_B - \dfrac{5}{3}. \end{cases} \qquad \text{(A2.1)}$$

Чтобы решить систему (A2.1), подставим значение y_B в первое уравнение системы (A2.1), а затем раскрыв скобки, соберем подобные члены и решим полученное квадратное уравнение. В нашем случае уравнение легко решить, если заметить, что можно вынести общий множитель из вторых скобок. Тогда, $(x_B - 2)^2 + (16/9)(x_B - 2)^2 = 25$. Отсюда, $(25/9)(x_B - 2)^2 = 25$, и $x_B = 7$ или $x_B = -1$. Один из корней, $x_B = 7$ является посторонним. Поэтому, вершина B имеет координаты $(-1, -3)$.

Прямая линия l, на которой лежат две другие вершины, перпендикулярна m. Поэтому, ее наклон является “дважды обратным” к наклону прямой l: $k_l = (-1/k_m) = (-1/(4/3)) = -3/4$. Отсюда, прямая l, которая содержит точку M, имеет уравнение: $y - 1 = (-3/4)(x - 2)$ или $y = (-3/4)x + 2{,}5$. Осталось воспользоваться тем, что стороны ромба равны 13 стадиям и найти координаты вершин: $\begin{cases} (x-5)^2 + (y-5)^2 = 13^2; \\ y = \dfrac{-3}{4}x + \dfrac{5}{2}. \end{cases}$ Подставив значение y из 2–го уравнения системы в 1–е, раскрыв скобки и приведя подобные члены, затем решим полученное квадратное уравнение: $25x^2 - 100x - 2204 = 0 \Rightarrow x_1 = 11{,}6;\ x_2 = -7{,}6.$

Следовательно, координаты двух вершин ромба: $(11{,}6,\ -6{,}2)$ и $(-7{,}6,\ 8{,}2)$. Отметим, что этот ответ можно получить, если понять, что вершины ромба являются точками пересечения окружностей радиуса 13 с центрами в точках A и B. Тогда будет достаточно решить систему: $\begin{cases} (x-5)^2 + (y-5)^2 = 13^2; \\ (x+1)^2 + (y+3)^2 = 13^2. \end{cases}$

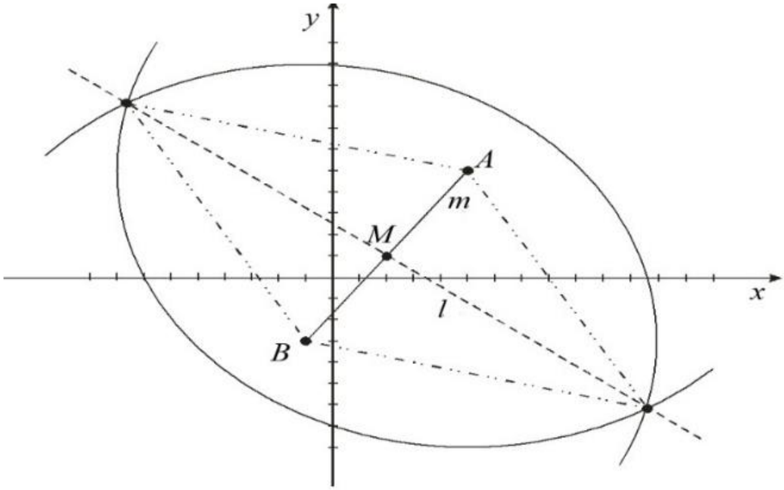


Рисунок А2.2

ПРИЛОЖЕНИЕ А3. ЗАДАЧИ, РЕШАЕМЫЕ С ПОМОЩЬЮ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Никто не отрицает важность умения моделировать экономические ситуации. Многие вузы имеют курсы с соответствующими названиями. По нашему мнению, солидным подспорьем в развитии навыков моделирования может стать раздел математики, в котором изучаются методы решения систем линейных уравнений. К сожалению, при переходе от школьной математики к вузовской, как правило, забывают о задачах на составление уравнений и их систем, и весь упор делается на развитие голой техники. Конечно, существуют объективные причины, главная из которых ограниченность времени выделяемого на изучение предмета. Но, сэкономив на времени, мы теряем много больше.

Для подкрепления этого тезиса, мы приводим отрывок из романа знаменитого английского писателя Дика Френсиса «Двойная осторожность»: … – *сегодня вы узнаете, сколько времени требуется пуле, летящей с определенной скоростью, чтобы преодолеть определенное расстояние…*

Винтовка, которую я принес на урок, была обыкновенной духовушкой, но я рассказал им и о том, как действует настоящая винтовка, и почему пуля вылетает из ствола так быстро. ... Я рассказывал о трении о воздух и о нагревании. Они слушали очень внимательно и задавали обычные вопросы. ...

Урок продолжался. Они запомнят его на всю жизнь – благодаря винтовке. А без винтовки он бы мгновенно смешался с общим прахом учения, который они каждый день отрясают со своих ног, покидая стены школы. Мне часто кажется, что преподавание — это не только сообщение сведений, но и пробуждение образов. Именно то, что сообщаешь в форме шутки, они потом лучше всего отвечают на экзаменах. ...

В этом разделе приводятся примеры задач на составление систем линейных алгебраических уравнений.

Пример 1

Сдавая склады, кладовщик АГЮРОВ указал, что на первом складе имеется 30 маленьких, 15 средних, и 20 больших мешков с сахаром. Всего 2850 кг. Соответствующие данные по второму складу: 18; 22; 11; 2300 кг; по третьему складу: 42; 8; 29; 3100 кг. Изучив эти данные, а также, обратив внимание на фамилию кладовщика, Шерлок Холмс, знакомый с теорией линейных уравнений установил, что имеет место нестыковка данных. (Если Вы уже решили эту задачу, которая предлагалась ранее, можете сравнить решения.)

Обозначим вес маленького мешка через x, среднего через y, и большого через z. Тогда имеет место система уравнений:

$$\begin{cases} 30x + 15y + 20z = 2850, \\ 18x + 22y + 11z = 2300, \\ 42x + 8y + 29z = 3100. \end{cases} \qquad \text{(A3.1)}$$

Определитель Δ матрицы коэффициентов системы (A3.1) равен нулю:

$$\begin{vmatrix} 30 & 15 & 20 \\ 18 & 22 & 11 \\ 42 & 8 & 29. \end{vmatrix} = 30\begin{vmatrix} 22 & 11 \\ 8 & 29 \end{vmatrix} - 18\begin{vmatrix} 15 & 20 \\ 8 & 29 \end{vmatrix} + 42\begin{vmatrix} 15 & 20 \\ 22 & 11 \end{vmatrix} =$$

$$=30(638 - 88) - 18(435-160) + 42(165 - 440) =$$
$$=30(550) - 18(275) + 42(-275) = 0.$$

Заменим первый столбец матрицы коэффициентов на правую часть системы, и подсчитаем определитель $\Delta(1)$, опять же используя разложение по первому столбцу. Отметим, что все определители второго порядка, необходимые для вычисления $\Delta(1)$ уже известны: $\Delta(1) =2850(550)–2300(275+310(–275=82500$.

Так как $\Delta=0$, а $\Delta(1)$ отлично от нуля, то система (А3.1) не имеет решения, или другими словами, данные кладовщика АГЮРОВа являются неверными.

В результате дополнительного расследования было установлено, что на третьем складе из мешков был отсыпан сахар, а вес маленького мешка должен быть 30 кг.

Для того чтобы определить сколько сахара было украдено, исключим из системы 3-е уравнение и подставив значение $x = 30$ в два первых уравнения системы (А3.1), получим систему

$$\begin{cases} 15y + 20z = 1950, \\ 22y + 11z = 1760. \end{cases} \qquad (А3.2)$$

Определитель матрицы коэффициентов этой системы уже подсчитан выше. Определитель вида $\Delta(1)$ равен: $\begin{vmatrix} 1950 & 20 \\ 1760 & 11 \end{vmatrix} = 1950 \cdot 11 - 1760 \cdot 20 = -13750.$ Поэтому, $y = (–13750)(275) = 50$. Теперь, из первого уравнения системы (А3.2) найдем z: $15(50) + 20z = 1950 => z = 60$.

В результате, мы знаем, сколько должен весить каждый мешок, и из третьего уравнения установим, сколько сахара должно было быть на 3–м складе: $42(30)+8(50)+29(60)=3400$ кг.

То есть, украдено $3400 – 3100 = 300$ кг.

Пример 2

Заработав \$10 000, Канайым решила использовать их тремя способами. Первую часть она вложила в банк под 5% годовых, на вторую часть она купила облигации, приносящие 8% в год, а на третью часть, равную удвоенной второй купила акции, приносящие 9% дохода. Найдите размеры этих частей, если известно, что в конце года она получила \$830 дохода.

Обозначим величину первой части через x, второй — через y, и третьей через z. Тогда имеет место система уравнений:

$$\begin{cases} x + y + z = 10000, \\ 0,05x + 0,08y + 0,09z = 830, \\ 2y - z = 0. \end{cases} \qquad (A3.3)$$

Определитель Δ матрицы коэффициентов системы отличен от нуля: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0,05 & 0,08 & 0,09 \\ 0 & 2 & -1. \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 0,08 & 0,09 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - 0,05\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0,08 & 0,09 \end{vmatrix} =$

$=1(–0,08 – 0,18) – 0,05(–1 – 2)+ 0(0,09 – 0,08)=$
$=1(–0,26)–0,05(–3)+0(0,01)= –0,11$. Следовательно, система имеет единственное решение. Первую неизвестную найдем, вычислив $\Delta(1)$: $\Delta(1) = 10000(–0,26) – 830(–3) + 0(001) = –110.$ Тогда $x = \Delta(1)/\Delta =–110/0,11 = 1000.$ Исключим второе, сложное, уравнение и, использовав значение x, получим, $\begin{cases} y + z = 9000, \\ 2y - z = 0. \end{cases}$

Определитель матрицы коэффициентов этой системы равен (–3). Определитель вида $\Delta(1)$ равен: $\begin{vmatrix} 9000 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -9000.$

Отсюда, $y = 3000$, и следовательно, $z = 6000$.

Конечно, основной упор делается на решение систем уравнений, но процесс составления систем уравнений имеет и самостоятельную ценность. Стоит обратить внимание и на то, что довольно часто, из ситуационной формулировки задачи, вытекают дополнительные условия.

Пример 3

Одного очень ученого математика попросили разобраться в следующей ситуации: Компания производит три модели пылесосов. Первая модель требует 2 часа на сборку, 0,5 часа на упаковку и $250 на закупку комплектующих. Соответствующие данные по второй модели: 3 часа, 0,5 часа и $300; по третьей: 4 часа, 1 час и $200. Сколько пылесосов каждой модели было произведено, если истрачено 34 часа на сборку, 6,5 часов на упаковку и $3950 на закупку комплектующих?

Он вычислил определитель матрицы коэффициентов системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0,5 & 0,5 & 1 \\ 250 & 300 & 200 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 0,5 & 1 \\ 300 & 200 \end{vmatrix} - 0,5\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 300 & 200 \end{vmatrix} + 250\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 0,5 & 1 \end{vmatrix} =$$

$= 2(100 - 300) - 0,5(600 - 1200) + 250(3 - 2) =$
$= 2(-200) - 0,5(-600) + 250(1) = 150$, *и сказал, что система имеет место единственное решение. Остальное очевидно. И вообще, ему нужно заниматься псевдодифференциальными операторами 5–го порядка с вырождениями седьмого вида, а не тратить время на всякие глупости.*

Что на это можно сказать? Математик действительно очень умный и знающий. А вот исходная задача, в отличие от системы, решения не имеет.

Заменив первый столбец определителя Δ, на столбец свободных членов системы

$$\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 34, \\ 0,5x + 0,5y + z = 6,5, \\ 250x + 300y + 200z = 3950, \end{cases} \qquad (A3.4)$$

получим определитель

$$\Delta(1) = 34(-200) - 6,5(-600) + 3950(1) = 1050.$$

Отсюда, $x = 1050/150 = 7$. Далее, последовательно понижая порядок системы, получим, что $y = 8$, $z = -1$. Конечно, полученные числа являются решением системы (A3.4), но они не могут быть решением исходной задачи. В реальной жизни это может означать, что в условиях задачи имеется ошибка.

Приведем еще один пример подобного вида.

Пример 4

Фермер, имеющий 40 га земли, выращивает пшеницу, кукурузу и овес. Он знает, что 1 га пшеницы требует затрат 10 часов труда и 500 сомов денег. Данные по кукурузе: 11 часов и 450 сомов; по овсу: 7 и 650. Как можно распределить землю, для того чтобы полностью использовать все ресурсы, если имеется 450 часов труда и 17500 сомов?

Система уравнений, соответствующая этой задаче

$$\begin{cases} x + y + z = 40, \\ 10x + 11y + 7z = 450, \\ 500x + 450y + 650z = 17500. \end{cases} \qquad (А3.5)$$

имеет определитель Δ матрицы коэффициентов равный нулю:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 10 & 11 & 7 \\ 500 & 450 & 650 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 11 & 7 \\ 450 & 650 \end{vmatrix} - 10\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 450 & 650 \end{vmatrix} + 500\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 11 & 7 \end{vmatrix} =$$

$=1(4000) - 10(200) + 500(-4) = 0.$

Определитель $\Delta(1) = 40(4000) - 450(200) + 17500(-4)$ также равен нулю. Поэтому, мы можем положить $x = p$ (p – параметр) и отбросив третье уравнение системы (А.6), прийти к системе уравнений $\begin{cases} y + z = 40 - p, \\ 11y + 7z = 450 - 10p. \end{cases}$ Определитель матрицы ее коэффициентов подсчитан выше, и равен (-4). Заменив первый столбец матрицы коэффициентов на правую часть системы, получим, что $\Delta_1(1) = (40 - p)\cdot 7 - (450 - 10p)\cdot 1 = 3p - 170$. Отсюда, $y = (3p - 170)/(-4) = -0,75p + 42,5$, и затем $z = -2,5 - 0,25p$. Набор чисел $\{p; -0.75p + 42.5; -2.5 - 0.25p\}$ является решением системы (А3.5) при любом значении p, другими словами система имеет бесконечно много решений, но ни одно из этих решений не является решением исходной задачи, так как ни при одном значении p переменные x, y, z, обозначающие количество гектаров земли занятой под разные культуры, не могут одновременно быть неотрицательными.

Покажем, что процесс решения систем, в которых число неизвестных не совпадает с числом уравнений, легко сводится к процессу решения систем, в которых число неизвестных равно числу уравнений.

Пример 5

Три физика – экспериментатора рассматривали следующую ситуацию: Производится 3 модели измерительных приборов. Первая модель требует 2 часа на сборку и \$50 на закупку комплектующих. Соответствующие данные по второй модели: 3 часа и \$60; по третьей: 4 часа и \$40. Сколько *измерительных приборов каждой модели произведено, если истрачено 34 часов на сборку и $730 на закупку комплектующих?*

Первый из них путем подбора определил, что ответ {5; 8; 0}, второй, так же нашел решение {9; 4; 1}, третий — {13; 0; 2}. В последовавшей вслед за этим бурной дискуссии каждый доказывал свою правоту, но истина так и не была выявлена, и говорят, что с тех пор они не разговаривают друг с другом.

Конечно же, дело в том, что задача имеет много решений. Для того чтобы выписать все решения, составим систему уравнений $\begin{cases} 2x+3y+4z=34, \\ 50x+60y+40z=730. \end{cases}$ Положим $z = p$, и получим систему $\begin{cases} 2x+3y=34-4p, \\ 50x+60y=730-40p. \end{cases}$ Для нее $\Delta = (-30)$ и

$\Delta(1) = (34-4p)60-(730-40p)3 = -120p-150$. Тогда $x = 4p+5$.

Отсюда, $3y = 34-4p-2(4p+5)$ и $y = (24-12p)/3 = 8-4p$.

Ответ: $\{4p+5;\ 8-4p;\ p\}$. Здесь $p = 0, 1, 2$.

При всех остальных целых значениях p соответствующая тройка чисел будет иметь отрицательное число, обозначающее число произведенных приборов. Если бы мы решали просто систему, то годилось бы любое значение параметра p.

Пусть система имеет $n+l$ уравнений и n неизвестных (число неизвестных меньше числа уравнений). Такие системы называются переопределенными.

Для того, чтобы решить такую систему, можно взять первые n уравнений системы и решить полученную систему. Затем проверить на оставшихся уравнениях системы, конкретизируя при необходимости значения параметров, являются ли найденные значения решением системы.

Пример 6

Решить систему $\begin{cases} 2x-y=-1, \\ -4x+2y=2, \\ x-y=-1, \\ x+3y=10. \end{cases}$

Первые два уравнения системы дают значения $x = p$, $y = 1 + 2p$. Подставив эти значения в 3–е уравнение, получим, что $x=0$, $y=1$. Но, из 4–го уравнения следует, что система решений не имеет.

Пример 7

Придерживаясь требований оздоровительной диеты, Токон употребила 1400 единиц углеводов, 1320 белков и 1190 жиров. При этом использовались упаковки двух видов: упаковки продукта А, каждая из которых содержит 3 единицы углеводов, 2 – белков, 4 – жиров, а также продукта В с 4; 4; 3 единицами соответственно. Сколько упаковок каждого вида использовано?

Для того чтобы решить систему уравнений, соответствующую этой задаче $\begin{cases} 3x+4y=1400, \\ 2x+4y=1320, \\ 4x+3y=1190, \end{cases}$ решим систему, состоящую из двух первых уравнений, и подставив найденные значения в 3-е уравнение, убедимся в том что $x = 80$, $y = 290$.

ПРИЛОЖЕНИЕ А4. ЗАДАЧА ПРО СУЛТАНА

Если б я был султан,
То б имел трех жен …

Султану нужно полтора часа, для того чтобы спокойно посмотреть футбол. С этой целью он решил обязать своих жен погладить халаты, обшить платки и заштопать носки.

Известно, что Зульфия гладит халат за 15 минут, обшивает платок за 2 минуты, штопает носок за 7 минут. Соответствующие данные Гулии: 12, 3, 9; Фатьмы: 18, 1, 5.

Задумавшись над тем, сколько халатов, платков и носков нужно выдать каждой жене, он понял, что это довольно сложная задача. (Султан понимает, что для сохранения «хорошей погоды» в доме все жены должны получить одинаковые задания.) Вызванный на помощь мудрый визирь сумел найти решение проблемы. Султан, не отвлекаясь, посмотрел игру, а так как плюс ко всему его команда выиграла, он получил большое удовольствие.

Перед следующей игрой султан решил действовать по оправдавшей себя схеме. Но в этот момент к султану подошла его любимая жена Зульфия и попросила разрешения на 10–минутный перерыв во время работы. Отказать ей, султан, конечно же, не смог и возникла необходимость пересмотреть задания.

Был вызван визирь, который, о ужас, сказал, что он не может решить эту задачу. Что тут началось! Зульфия кричала, что визирь делает это нарочно. Он давно уже задумал сделать любимой женой султана Гулию – свою родственницу. Султан сказал, что он немедленно бы казнил визиря, если б не знал, что Европейский парламент и ряд других, столь же уважаемых организаций, против смертной казни.

Затем вмешались остальные жены, затем тещи, …

Вы, конечно, представляете, какой поднялся шум. Султану было не до футбола.

Визиря от казни спасло только то, что он, когда все более или менее успокоились, сказал, что дело не в уменьшении времени для Зульфии. Эта задача неразрешима и в случае любой жены, и более того: если б даже понадобилось не уменьшить время для Зульфии, а увеличить – все равно задача остается неразрешимой.

На следующий день, остыв, Султан и Зульфия пригласили к себе визиря и попросили объяснить ситуацию. Визирь провел с ними несколько занятий по линейной алгебре, после которых выяснилось, что решение задачи сводится к нахождению решения системы линейных алгебраических уравнений, а для некоторых систем решение невозможно найти даже под угрозой смертной казни.

Зульфия, к ее чести, оказалась способной ученицей. Она, помимо того, что извинилась и достойно наградила визиря, поняла, что для того чтобы побыть рядом с любимым мужем 10 лишних минут, нужно работать более интенсивно в остальное время. Она определила, что все будет в порядке, если она будет гладить халат за 13 минут, обшивать платок за 2 минуты и штопать носок за 6 минут.

В этой истории, кажется, наступил happy end: султан спокойно смотрит футбол, Зульфия остается любимой женой, а нам остается только радоваться, глядя на них.

К сожалению, мир, который установился во дворце, не нравится одной из тещ – матери Фатьмы. Она давно мечтает увидеть свою дочь в роли любимой жены. Поэтому, обдумав слова визиря во время скандала, она подговорила дочь пойти и предложить поработать для любимого мужа больше, чем 90 минут. При этом она сказала – Ты заработаешь дополнительные очки в глазах мужа как прилежная жена, и при этом тебе не придется перерабатывать, так как задача увеличения времени все равно неразрешима.

Можете представить себе разочарование Фатьмы, когда через некоторое время она получила задание султана погладить 4 халата, обшить 2 платка и заштопать 4 носка. Самое обидное для нее заключалось в том, что, как она узнала потом, задачу решила сама Зульфия, не прибегая к помощи визиря.

Мать Фатьмы не учла того, что Зульфия стала работать быстрее.

А Зульфия в очередной раз доказала, что долгое время любимой женой может быть только умная женщина.

Для того чтобы разобраться в этих событиях, переведем эту задачу на язык математики.

Решение

Обозначив через a количество халатов, b — платков, c — носков, получим систему уравнений: $\begin{cases} 15a+2b+7c=90, \\ 12a+3b+9c=90, \\ 18a+b+5c=90. \end{cases}$

Первое уравнение определено данными Зульфии, второе — Гулии, третье — Фатьмы. Разделим второе уравнение на 3 и, ориентируясь на коэффициенты при переменной b, вычтем полученное уравнение из первого уравнения с коэффициентом 2 и из третьего уравнения с коэффициентом 1:

$\begin{cases} 15a+2b+7c=90, \\ 4a+b+3c=30, \\ 18a+b+5c=90, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7a+c=30, \\ 4a+b+3c=30, \\ 14a+2c=60. \end{cases}$ Теперь заметим, что удвоенное первое уравнение совпадает с третьим. То есть система эквивалентна системе из двух уравнений:

$\begin{cases} 7a + c = 30, \\ 4a + b + 3c = 30. \end{cases}$ Так как число неизвестных превосходит число уравнений, одно из неизвестных можно выбрать произвольным образом. Пусть $c = p$, где p любое число. Тогда, $a = [30 - p]/7$, $b = 30 - 3p - 4[30-p]/7 = [90-17p]/7$. Значения переменных a, b, c — это количества халатов, платков, носков. Поэтому, они должны быть неотрицательными и целыми. Анализ показывает, что только при $p = 2$ тройка чисел ($[30-p]/7;\ [90-17p]/7;\ p$) будет удовлетворять этим условиям. Итак, Султан обязал каждую жену погладить 4 халата, обшить 8 платков и заштопать 2 носка.

В следующий раз, если разрешить Зульфие 10–минутный перерыв, то получится система уравнений $\begin{cases} 15a + 2b + 7c = 80, \\ 12a + 3b + 9c = 90, \\ 18a + b + 5c = 90. \end{cases}$

Тогда: $\begin{cases} 15a + 2b + 7c = 80, \\ 4a + b + 3c = 30, \\ 18a + b + 5c = 90, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7a + c = 20, \\ 4a + b + 3c = 30, \\ 14a + 2c = 60, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7a + c = 20, \\ 4a + b + 3c = 30, \\ 0 = 20. \end{cases}$

Так как 0 не может равняться 20, получился абсурд. В таких случаях математики говорят, что система не имеет решения. Итак, дело не в происках визиря — в этом случае нужного набора халатов, платков и носков не существует.

После того как Зульфия стала работать быстрее, получилась система $\begin{cases} 13a + 2b + 6c = 80, \\ 12a + 3b + 9c = 90, \\ 18a + b + 5c = 90. \end{cases}$ Будем решать ее примерно так же, как и предыдущие:

$$\begin{cases} 13a + 2b + 6c = 80, \\ 12a + 3b + 9c = 90, \\ 18a + b + 5c = 90, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 13a + 2b + 6c = 80, \\ 4a + b + 3c = 30, \\ 18a + b + 5c = 90, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5a = 20, \\ 4a + b + 3c = 30, \\ 14a + 2c = 60. \end{cases}$$

Из первого уравнения полученной системы, $a = 4$, подставив это значение в третье уравнение, получим $c = 2$, и наконец, из второго уравнения, получим $b = 8$.

Последняя ситуация. Для того чтобы погладить 4 халата, обшить 2 платка и заштопать 4 носка, Зульфия потратит как и раньше: $13\cdot4+2\cdot2+6\cdot4=52+4+24=80$ минут; Гулия также затратит прежнее время: $12\cdot4 + 3\cdot2 + 9\cdot4 = 48+6+36 = 90$ минут, а Фатьма будет работать больше: $18\cdot4+1\cdot2+5\cdot4 = 72 + 2 + 20 = 94$ минуты.

Примечание

Вычислив определители матриц коэффициентов систем: $\begin{vmatrix} 15 & 2 & 7 \\ 12 & 3 & 9 \\ 18 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 0;$ $\begin{vmatrix} 80 & 2 & 6 \\ 90 & 3 & 9 \\ 90 & 1 & 5 \end{vmatrix} \neq 0;$ $\begin{vmatrix} 13 & 2 & 6 \\ 12 & 3 & 9 \\ 18 & 1 & 5 \end{vmatrix} \neq 0$, можно увидеть, что истории про Султана и просьбу любимой жены Зульфии о разрешении на 10–минутный перерыв во время работы, а также предложении Фатьмы является отличной иллюстрацией одного из основных утверждений линейной алгебры:

Если определитель матрицы коэффициентов системы равен нулю, то система имеет бесконечно много решений или не имеет решений.

Если определитель матрицы коэффициентов системы не равен нулю, то система всегда имеет единственное решение.

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ

§1

Упражнение 1.1. С. (37; 43); **Н.** (73; 213);
Упражнение 1.2. С. (53; 18); **Н.** 493 $см^2$;
Упражнение 1.3. С. 152 см; 171 см; **Н.** 90,5 сомов
Упражнение 1.4. С.126 **Н.** (240; 140);
Упражнение 1.5. С.126 **Н.** (240; 140)**;**
Упражнение 1.6. С.340 **Н.** (520; 7300;
Упражнение 1.4.
С. Вес Карима 71 кг, Дании — 54 кг, Тариэля — 68 кг.
Н. 996 г, 1003 г, 1006 г, 998 г. Средний вес равен 1000,75 г.
Упражнение 1.8. С. (*47; 79; –26)* **Н.** *(63; 37)*
Упражнение 1.9. С. (*36; 27)* или (*36; –27)* **Н.** *(2,25; –1)*.
Итоговые задания
1. *(–2; 4)* **2.** *(2/17; 7/17)* **3.** *(20; 64)* **4.** *(1,5; 0,8)*
5. *(6,5; 9)* **6.** *(7; 12)* 7. Цена блокнота \$1,8, альбома \$1,5.
8. Цена ручки \$0,28; линейки \$0,35; тетради \$0,37 **9.** *(2; 5)*

§2

Упражнение 2.1
С. $\overline{EF} = (5; 4)$, $\overline{FE} = (–5; –4)$, $\overline{EG} = (3; –3)$, $\overline{FG} = (–2; –7)$.
Н. $\overline{KL} = (5; 5)$, $\overline{LM} = (1; –7)$, $\overline{ML} = (–1; 7)$, $\overline{KM} = (6; –2)$.
Упражнение 2.2
С. 1) *a)* $\overline{EG} = \overline{EF} + \overline{FG}$; *b)* $\overline{FI} = \overline{FG} + \overline{GH} + \overline{HI}$;
c) $\overline{GF} = -\overline{FG}$; *d)* $\overline{EI} = \overline{EF} + \overline{FG} + \overline{GH} + \overline{HI}$.
2) $\overline{EF} = (5; 4)$, $\overline{FG} = (–2; –7)$, $\overline{GH} = (–1; 0)$, $\overline{HI} = (–1; 1)$
a) $\overline{EG} = (3; –3)$; *b)* $\overline{FI} = (–4; –6)$ *c)* $\overline{GF} = (2; 7)$; *d)* $\overline{EI} = (1; –2)$.
Н. 1) *a)* $\overline{NM} = -\overline{MN}$; *b)* $\overline{LN} = \overline{LM} + \overline{MN}$;
c) $\overline{LO} = \overline{LM} + \overline{MN} + \overline{NO}$; *d)* $\overline{KO} = \overline{KL} + \overline{LM} + \overline{MN} + \overline{NO}$;
2) $\overline{KL} = (5; 1)$, $\overline{LM} = (2; –6)$, $\overline{MN} = (–2; 1)$, $\overline{NO} = (–5; 7)$
a) $\overline{NM} = (2; –1)$; *b)* $\overline{LN} = (0; –5)$ *c)* $\overline{LO} = (–5; 2)$ *d)* $\overline{KO} = (0; 3)$
Упражнение 2.3
С. 1) *T = (–11,2; 50/7)* 2) *T = (1; –2)+(–3; –5) = (–2; –7)*
Н. *1) P = (–11; 14)* *2) D = (3; –5)+(–2; –5) = (1; 0)*
Упражнение 2.4
С. $\sqrt{1^2+(-3)^2} = \sqrt{10} \approx 3.16$ **Н.** $\sqrt{10^2+(1)^2} = \sqrt{101} \approx 10.04$

Упражнение 2.5

C. $\sqrt{24^2+(-24)^2}=\sqrt{1152}\approx 33.94$ **H**. $\sqrt{6^2+(-4)^2}=\sqrt{52}\approx 7.21$

Упражнение 2.6

C. (7/25; –24/25) **H**. (6/10; 8/10)

Упражнение 2.7

C. (–90/41; 400/41), (90/41; –400/41) **H**. (–20/13; 48/13), (20/13; –48/13)

Упражнение 2.8

C. *R(–1; 5,5)* **H**. *C(4; –1)*

Упражнение 2.9

C. 68 м **H**. 65 м

Упражнение 2.10

C. *600* **H**. *1140*

Упражнение 2.11

C. *–30;* **H**. *–6.5*

Упражнение 2.12

C. $\arccos(11/\sqrt{17\cdot 45})$

H. Угол между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{2021a}$ равен углу между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{a}$: $\arccos(13/\sqrt{65\cdot 26})$

Упражнение 2.13

C. *(17/6; 1/3)* **H**. *(–1/22; –37/22)*

Упражнение 2.14

C. $1{,}3\overline{a}+2\overline{b}=5{,}6i-0{,}1j-7{,}5k;$ $-101;$

H. $-0{,}4\overline{a}+6\overline{b}=21.6i+5.6j;$ $-22.2;$

Упражнение 2.15

C. *a)* $\sqrt{68}$; *b) 50; c)* $\arccos\sqrt{\frac{50}{68}}=\arccos\frac{5}{\sqrt{34}}$;

d) P(5; 0); e) *6*; *f) 3; g) D(4; –5); h) (0,5; –0,8)*

H. *a)* $\sqrt{40}$; *b) 40; c)* $\arccos\frac{1}{\sqrt{2}}=45^o$; *d) 20*; e) $5\sqrt{2}$;

f) P(–1,6; 2,2); g) D(3; –4); h) (0,7; –1)

Итоговые задания

1. a) $\overline{AC}$ **;** b) $\overline{BA}$ **;** c) $\overline{AE}$ **;** d) $\overline{AB}$

2. a) $\sqrt{180}$ **;** b) $\sqrt{160}$

3. a) 7/3; b) *x = 15 ; y = 1.2 ;*

4. a) *AB*(*2; 2*); $\sqrt{8}$ и *AC*(*0; 6*); 6; b) (*6; 3*);
c) (*8; 5*) или (*0; –3*); d) (*8/3; –1/3*) ; e) 24;

5. a) ($0; 4$); b) ($-0{,}2; 0{,}6$) ; c) ($9; -12$) или ($-9; 12$);

d) $\arccos\dfrac{26}{\sqrt{1000}}$;

6. *1140;*

7. a) ($15/\sqrt{3{,}25}$; $-10/\sqrt{3{,}25}$) или ($-15/\sqrt{3{,}25}$; $10/\sqrt{3{,}25}$)

b) ($24/7; -6/7$) ; c) $\arccos(-2/\sqrt{13\cdot 65})$; d) $\sqrt{82}$; e) 14.5;
f) ($-98/29; -54/29$);

8. $-4\bar{a} + 1{,}6\bar{b} = 25{,}6i - 15{,}2j$; -13

9. Клады расположены в точках:
(–20; 0), (28; 36), (1; 72), (–47; 36), (55; 0), (7; –36), (–20; 100), (–68; 64), (76; –28), (28; –64), (14,56; –10,08), (–20; 36), (28; 0), (–8,48; 48,64)

Получается, что приобретение прав на клады Пифагора оказывается не только престижным, но и весьма выгодным делом: можно получить 1400 золотых монет, затратив 1000 монет и какое–то количество умственной энергии. (Один из вариантов решения задачи приведен в конце книги.)

Квиз 1

1. *{4,3; 1,1}*

2–3. $7\cdot 95 + 12\cdot 29 = 1013$

4. *27542; 773,77*

5. *7*

6. ($-7; -5$), $(74)^{1/2}$

7. ($-4{,}8; 3$)

8. $x(-7; -5) + y(-6; -8) = (-1; 2) \Rightarrow x = 20/26; y = -19/26.$

9. $42 + 40 = 82;\ \cos a = 82/[(74)^{1/2}\cdot(112)^{1/2}] \approx 0{,}9007.$

10. $91\cdot 60/2 = 2730$

§3

Упражнение 3.1

C. a) 16 b) 40 c) 3 d) 3,75 **H.** a) 15 b) 35 c) 4 d) 2,8

Упражнение 3.2

C. 1. a)26 b)50 c)13 d)13,75 **2.** a)11 b)35 c)–2 d)–2,75

H. 1. a)17 b)37 c)6 d)4,8 **2.** a)23 b)43 c)12 d)10,8

Упражнение 3.3

C. $p_S = 4q-20;\ p_D = -5/4q+127$ **H.** $p_S = 62{,}5q+25;\ p_D = -40q + 221{,}8$

Упражнение 3.4

C. a) 140 b) 260 c) 2.5 d) 1,25 **H.** a) 60 b) 20 c) 7 d) 10

Упражнение 3.5

C. $a(w) = 45w+70$; 358 **H.** $v(t) = -8t + 94$; 26

Упражнение 3.6

С. a) $y = 4x - 2$; b) $y = -0{,}2x + 4$; **Н.** a) $y = -2x + 3$; b) $y = 3x - 3$

Упражнение 3.7

С. $p_S = 4q - 30$; $p_D = -5/4q + 117$; $E(28; 82)$

Н. $p_S = 62{,}5q + 35$; $p_D = -40q + 231{,}8$; $E(1{,}92; 155)$.

Упражнение 3.8

С. 1:50. Указание: координаты начальной точки для Мухтара (90; F), конечной точки для Динары (140; F). **Н.** 72 км; в 5:30.

Итоговые задания

1. 28 сорочек; 7 часов. **2**. $q = -1{,}6t + 9{,}6$; 2,8 тонн; 2 часа 12 мин

3. a) $y = -x$; b) $y = 0{,}3x + 4$

4. $p_s = 1{,}25q - 16{,}25$; $p_d = -1{,}25q + 112$; 47,875 сомов; 51,3 тонн

5. $p_s = 125q + 67$; $p_d = -40q + 331$; *267 сомов; 1,6 тонн*

6. 60,4 км. Указание. Имеет место функция $y = -56x + b$.

7. Автобус и такси встретились ровно посреди дороги в 4,8 часов, то есть в 4 часа 48 минут.

8. В 4 часа 15 минут на расстоянии 10 км от Лукашовки.

9. В 2 часа 7 минут 30 секунд.

§4

Упражнение 4.1

С. a) 5000 сомов b) 6000 сомов c) 8000 сомов

Н. a) \$2000 b) \$2600 c) \$2800

Упражнение 4.2

С. a) 3200 сомов b) 5600 сомов c) 7200 сомов

Н. a) \$900 b) \$1200 c) \$1800

Упражнение 4.3

С. a) 17800 сомов b) 26600 сомов c) 29000 сомов

Н. a) \$2100 b) \$2400 c) \$2900

Упражнение 4.4

С. a) 1000 сомов b) 6500 сомов c) 10000 сомов. Если Айдана имела 20500 сомов, тогда прямая должна быть параллельна исходной, увеличивая все значения на 1500.

Н. a) \$900 b) \$690 c) \$130. Если Нилуфар имела \$1450, тогда прямая должна быть параллельна исходной, все денежные значения будут меньше на 80.

Упражнение 4.5

С. a) –1200 сомов; b) 200 сомов; c) 1000 сомов

Н. a) – \$200; b) – \$100; c) \$300

Упражнение 4.6

С. 125 футболок **Н**. 650 кг абрикосов

Упражнение 4.7

C. a) 140; b) 165; c) 134 **H**. a) 672 кг; b) 722 кг; c) 660 кг.

Упражнение 4.8

C. 172 сомов **H**. $2.3

Упражнение 4.9

C. Айдана должна выбрать второй вариант, если она надеется продать хотя бы 17 единиц и первый вариант при меньших объемах продаж.

H. Салим должен выбрать второй вариант, если он надеется сдавать в аренду велосипеды хотя бы на 14 часов и первый вариант при меньших объемах.

Упражнение 4.10

C. Айлин должна выбрать второй вариант, если она надеется продать от 30 до 55 хотдогов и первый вариант при других объемах продаж.

H. Саид должна выбрать второй вариант, если она надеется продать от 1425 до 1740 экземпляров книги и первый вариант при других объемах продаж.

Упражнение 4.11

C. $[2008;\ \infty)$ **H.** $[530;\ \infty)$

Упражнение 4.12

C. $[425;\ 680]$ **H.** $[420;\ 550]$

Упражнение 4.13

C. $[520;\ \infty)$ **H.** $[387{,}5;\ \infty)$

Упражнение 4.14

C. $[550;\ \infty)$ **H.** $[400;\ \infty)$

Упражнение 4.15

C. $[650;\ \infty)$ **H.** $[500;\ \infty)$

Упражнение 4.16

C. $[450;\ 600]$ **H.** $[420;\ 550]$

Упражнение 4.17

C. $[450;\ 600]$ **H.** $[420;\ 550]$

Упражнение 4.18

C. $[275;\ \infty)$ **H.** $[400;\ \infty)$

Упражнение 4.19

C. $[417{,}5;\ \infty)$ **H.** $[555;\ \infty)$

Упражнение 4.20

C. $[3000;\ 5300]$ **H.** $[50;\ 85]$

Итоговые задания

1a. $[12{,}5; +\infty)$ **1b.** $[10; 20]$ **2a.** $[10; +\infty)$ **2b.** $[5; 14]$

3a. $[10; +\infty)$ **3b.** $[10; 30]$ **4a.** $[40; +\infty)$ **4b.** $[12; 50]$

5a. $[40; 135]$ **5b.** $[30; 45]$ **6a.** $[50; +\infty)$ **6b.** $[50; 65]$

7. 615

8. $Евро = –1,0144 \cdot \$ + 96,65858$.
Тогда, $–1,0144 \cdot 43,5151 + 96,65858 = 52,5169$.
9. 21 час и 3 минуты **10.** 25120
11. [30; 70] **11a.** [40; 60] **11b.** [40; 52,5]
12a. [250; +∞) **12b**. [405; +∞)
13. [300; 500] **14.** [133; +∞)
15. [100; 180] **15a. [**120; 160] **15b.** [120; 150]
16a. [835; +∞) **16b**. [1060; +∞)
17. [800; 1000] **18. [**100/3; 100]
19a. Если писатель считает, что будет продано более 12 000 экземпляров книги, то он должен выбрать фирму Q, иначе фирму P.
19b. Если писатель считает, что будет продано более 210 000 экземпляров книги, то он должен выбрать фирму Q, иначе фирму P.
20. Мээрим должна выбрать фирму K, если она надеется продать от 150 до 283 единиц и фирму M при других объемах продаж.
21. [340; 625] **22. [**775; +∞) **23.** [450; 600] **24.** [400; +∞) **25.** [56; 80]

§5

Упражнение 5.1
C. (7; –6), (52; –51), (–48; 49), (–23; 24), (102; –101)
H. (–19; –8), (21; 7), (77; 28), (–83; 32), (1; –0,5)
Упражнение 5.2
C. $(x – 5)/(–2) = (y + 11)/11$ **H.** $(x – 1)/(–3) = (y – 7)/2$
Упражнение 5.3
C. $(x – 11)/7 = (y + 2)/(–33)$ **H.** $(x + 3)/11 = (y – 15)/3$
Упражнение 5.4
C. $y – 27 = 12(x + 9)$ **H.** $y – 2,1 = 1,5(x – 1,1)$
Упражнение 5.5
C. \$18,000 **H.** 9000 сомов.
Упражнение 5.6
C. $(x – 39/11)/7 = (y – 34/11)/(–7)$ **H.** $(x –6)/3 = (y – 29/7)/4$
Упражнение 5.7
C. $4n + 10p = 200$; $5n + 10p = 200$
H. $25c + 10t = 250$; $25c + 10t = 300$
Упражнение 5.8
C. (–5; –1; 21), (3; 0; –5), (–1; –0,5; 8), (75; 9; –239),
H. (12; 51; –1), (33; –10; 43), (117; 21; 219), (–9; 112; –45).
Упражнение 5.9
C. $(x – 7)/(–3) = (y – 12)/(–15) = (z – 4)/(–5)$
H. $(x – 17)/(–18) = (y + 2)/(–5) = (z – 3)/1 = (t – 18)/(–7)$

Упражнение 5.10

С. $(x - 21)/(-3) = (y + 7)/(-15) = (z - 1{,}5)/(-5)$

Н. $(x - 12)/(-18) = (y - 1{,}7)/(-5) = (z + 5)/1 = (t - 6)/(-7)$

Итоговые задания

1. 1) $y = -x - 2$; 2) $y = -x + 5$; 3) $y = x + 1$;
4) $(-2; 0), (-1; -1), (0; -2), (1; -3), (2; -4)$ 5) $K(-1; -1)$, $k = 4/3$;
6) $\sqrt{111{,}25}$; 7) $x = 5$ или $y = -7$.

2. 1) $(x + 3)/8 = (y - 4)/(-3)$ 2) $(x - 4)/8 = (y + 3)/(-3)$
3) $(-4; 0)$; 4) $(x + 3)/7{,}5 = (y - 4)/(-5)$;
5) $(x + 3)/(-4) = (y - 4)/1$; 6) 35; 7) 35.

3. a) $-3(x - 2) + 7(y - 4) = 0$; b) $7(x - 2) = -3(y - 4)$.

4. 1) $(x + 1)/6 = (y - 2)/0$ 2) $(x + 2)/6 = (y + 3)/8 = (z - 1)/5$
3) $(x - 1)/(-8) = (y + 1)/3 = (z - 2)/(-11) = t/1$

5. *Это одна и та же прямая*

6. $(x - 7)/(-2) = (y + 2)/3 = (z - 15)/6$

7. $R = 1593{,}75t + 3623$; $R(12) = 3814{,}25$

§6

Упражнение 6.1

С. $(4;\ 5{,}5)$ **Н**. $(2;\ 7{,}8)$

Упражнение 6.2

С. нет решения **Н**. нет решения

Упражнение 6.3

С. $(p;\ 15 - 2{,}5p)$, где p — любое число.

Н. $(1{,}75p + 7;\ p)$, где p — любое число.

Упражнение 6.4

С. 1) Бесконечно много решений; 2) нет решения; 3) (17; 5,3).

Н. 1) (15; –2,2) 2) нет решения; 3) бесконечно много решений.

Упражнение 6.5

С. 1) нет решения 2) $x = 4{,}6$ 3) $x = p$, где p любое число
4) $(6{,}4 + 0{,}6p - 1{,}4q;\ p;\ q)$, где p и q — любые числа

Н. 1) нет решения 2) $x = -36$ 3) $x = p$, где p любое число
4) $(0{,}75 - 2{,}75p;\ p)$, где p любое число

Упражнение 6.6

С. 1) $x = 29 - 5a$
2) $x = (3c - 7)/(c + 9)$, если $c \neq -9$; нет решения, если $c = -9$
3) $x = -(2 + 3d + 12e)/6d$, если $d \neq 0$; нет решения, если $d=0$ и $e \neq -1/6$; бесконечно много решений, если $d=0$ и $e =1/6$.

Н. 1) $x = (28 + 3a)/12$
2) $x = 12/(5c + 2)$, если $c \neq -0{,}4$; нет решения, если $c= -0{,}4$

3) $x = (56e - 21 + 42d + 12e)/(7 + e)$, если $e \neq -7$;
нет решения, если $e = -7$ и $d \neq -413/42$;
бесконечно много решений, если $e = -7$ и $d = -413/42$.

Упражнение 6.7

С. 1) $(5a - 34{,}8;\ -2{,}1a - 2{,}1)$
2) $([3b^2+2b-56]/[b^2+12b+35];\ -5b/[b+7])$,если $b \neq -5$ и $b \neq -7$;
нет решения, если $b = -5$ или $b = -7$
3) $(1{,}25d/c;\ 1{,}5d)$, если $c \neq 0$;
бесконечно много решений $(p;\ 0)$, где p любое число,
если $c = 0$; $d = 0$;
нет решения, если $c = 0$; $d \neq 0$

Н. 1) $(2a;\ -a/3)$
2) $(3;\ -2b/[b + 3])$, если $b \neq -3$; нет решения, если $b = -3$
3) $(30 + 4{,}5d/[4c + 2];\ 0{,}3d + 2{,}4)$, если $c \neq -0.5$;
бесконечно много решений $(p;\ 5)$, где p — любое число, если $c = -0{,}5$, $d = -26/3$;
нет решения, если $c = -0{,}5$, $d \neq -26/3$.

Упражнение 6.8

С. 1) $(0{,}36a + 3{,}48;\ -0{,}04a + 0{,}28)$
2) $([12{,}04 - 9b]/[7 - 5b];\ 7/[7 - 5b])$, если $b \neq 1{,}4$;
нет решения, если $b = 1{,}4$
3) $([cd+3c-3d-37]/[5c-37];\ [11d-37/[5c-37])$, если $c \neq 37/5$;
бесконечно много решений $(p;\ 2{,}5p - 35/11)$, где p любое число, если $c = 37/5$, $d = 37/11$;
нет решения, если $c = 37/5$; d □ $37/11$.

Н. 1) 1) $(0{,}04a + 0{,}84;\ 0{,}16a - 3{,}64)$
2) $([4a + 9]/[5a + 24];\ 17/[5a + 24])$, если $a \neq -8{,}8$;
нет решения, если $a = -8{,}8$;
3) $([c^2 + 8c - 4]/[-6 + 5c - c^2];\ [5c + 14]/[-6 + 5c - c^2])$,
если $c \neq 2$ и $c \neq 3$;
нет решения, если $c = 2$ или $c = 3$.

Итоговые задания

1. a) $3{,}5$ b) $5/8$ c) $10{,}5$ d) $-5/16$ e) $5a$ e) $-6{,}5$
2. a) $1{,}2a$ b) $-0{,}6d$
c) $-1/c$, если $c \neq 0$, нет решения, если $c=0$.
d) $3d/c$, когда $c \neq 0$, нет решения, когда $c = 0$, $d \neq 0$,
любое число, когда $c = d = 0$
e) $(5n+2d)/4c$, когда $c \neq 0$;
нет решения, когда $c = 0$ и $5n + 2d \neq 0$,
любое число, когда $4c = 5n+2d = 0$
f) $-7a/26$; g) $(7a + b - 15)/(6 + a)$, когда $a \neq -6$;

нет решения, когда $a = -6,\ b \neq 57$;
любое число, когда $a = -6,\ b = 57$

3. a) $(p;\ 0{,}4p - 1{,}6)$ b) $(p;\ p - 4)$ c) $(p;\ 2p)$
d) $(p;\ q;\ 2{,}6 - 0{,}4p + 0{,}6q)$ e) $(p;\ q;\ \{2p - 38q + 14\}/3)$
f) $(7 - 2p - 3q + 4r;\ p;\ q;\ r)$
g) $(n - 2p_2 - 3p_3 - \ldots - np_n;\ p_2;\ p_3;\ldots np_n)$

4. 22 **5**. прибыль \$80; издержки \$60

6. *36* **7**. *(50; 40)* **8**. *(280; 320)* **9**. *80* **10**. *672*

11. a) $(4{,}3a - 0{,}2;\ -2{,}5a)$
b) Если $b = 6$ — нет решения;
если $b \neq 6$ единственное решение
$((76b - 11b^2 + 7)/(6 - b);\ (10b + 7)/(6 - b))$;
c) Если $c = 0$ и $d \neq -2{,}5$ — нет решения;
если $c = 0$ и $d = -2{,}5$ бесконечно много решений
$(p;\ (p + 40)/17)$, где p — любое число;
если $c \neq 0$ единственное решение
$((35 + 14d)/4c;\ (35 + 14d + 280c + 48cd)/68c)$.

12. Если a не равно $5{,}6$, тогда $(76/(28+5a);\ 3a-44/(28+5a))$;
если $a = 5{,}6$, тогда нет решения.

13. Если $b = 6$, тогда $(p;\ (4 - 2p)/3)$, где p — любое число;
если b не равно 6, тогда $(2 - 0{,}5b;\ 2)$.

14. Если $c = 5$, тогда нет решения;
если $c = 3$, тогда $(p;\ 1{,}4 - 0{,}6p)$, где p — любое число;
если c не равно 5 или 3, тогда $(7/(c - 5);\ -7/(c - 5))$.

15. Если $d = 6$, тогда $(p;\ (4 - 8p)/6)$, где p — любое число;
при $d = 4$ нет решения;
для других значений d решение $(2/(4 - d);\ 4/(d - 4))$.

16. a) $(7;\ 0)$ b) $(-1{,}2;\ 9{,}8)$ c) нет решения
d) $(p;\ 0{,}375p + 4{,}5)$, где p — любое число.

17. a) p должно быть отлично от 5
b) p должно быть отлично от $1{,}6$.

18. a) p должно быть равно 5;
b) p должно быть равно $-8/11$.

19. a) p должно быть равно 15.
b) p должно быть равно -8.

20. 1) Бесконечно много решений;
2) нет решения; 3) (26; 0).

Ответы к Демонстрационному варианту промежуточной контрольной работы, осень – 2020

1. а) $(a+b)/2$, б) $(b - a)/2$.

2. а) 10,5 квадратных единиц, б) (12, –5), в) (0,25; 0,05),
г) $y = x - 20$ д) $y = -7x + 88$
3. а) $V = -1400t + 10000$ б) $V(2) = 7200$
4. а) $P_D = -0{,}03q + 500$, б) $Ps = 0{,}05q + 100$, в) (5000; 350)
5. а) (200; + ∞), б) (741; + ∞), в) (70; 760)
6. (75; 60)
7. а) бесконечно много решений (p, $1{,}5p - 2{,}5$), где p – любое число, если $a = 10$; нет решений, если $a \neq 10$;
б) бесконечно много решений (p, $0{,}5p - 0{,}75$), где p – любое число, если $m = -3$; нет решений, если $m = 3$;
$(-3/(m-3),\ 3/(m-3))$, если $m \neq 3$ и $m \neq -3$.

§7

Упражнение 7.1.
С. $\{-7;\ 7\}$ **Н.** $\{-7;\ 7\}$
Упражнение 7.2.
С. *Нет решений* **Н.** *Нет решений*
Упражнение 7.3.
С. $\{1; -3; 2\}$ **Н.** $\{50000; 70000; 80000\}$
Упражнение 7.4.
С. $\{p; -4{,}5; 7; -44{,}5-5p\}$, где p любое число
Н. $\{p; 1 - 4p/7; 5p/7 - 1\}$, где p — любое число
Итоговые задания
1. {3; 2; –1} **2**. {2; –3; 1} **3**. {1; 1; 0} 4. Ø **5**. Ø
6. {1000; 2200; 1800} **7**. {1.5; 1.5; 0.5}
Ответы к дополнению к §7
1. $\{5+29b-17a; -2-17b+10a; a; b\}$ **2**. Ø **3**. $\{5; 0{,}5; 0; 2{,}5\}$
4. $\{25-4a; 16-2a; a; -4; 0\}$

§8

Упражнение 8.1.
С. 108 **Н.** –123
Упражнение 8.2.
С. –848 **Н.** –1440
Упражнение 8.3.
С. $(3;\ 6;\ -3)$ **Н.** $(2; -1; 4)$
Упражнение 8.4.
С. 1 **Н.** 2

Упражнение 8.5.

С. Собственным вектором соответствующим собственному числу *0* является вектор $\begin{pmatrix} 5a \\ -2a \\ a \end{pmatrix}$; собственному числу *4* — вектор $\begin{pmatrix} 3b \\ 2b \\ b \end{pmatrix}$; собственному числу *(–1)* — вектор $\begin{pmatrix} 3c \\ -3c \\ c \end{pmatrix}$, где $a,\ b,\ c$ — произвольные числа.

Н. Собственным вектором соответствующим собственному числу *3* является вектор $\begin{pmatrix} b \\ 4b \end{pmatrix}$; собственному числу 5 — вектор $\begin{pmatrix} a \\ 2a \end{pmatrix}$, где $a,\ b$ — произвольные числа.

Итоговые задания

1. *–32* **2**. *–6* **3**. $2x - x^2 - 3$

4. *0 (второй столбец является удвоенным первым)*

5. *0* **6**. *–173* **7**. $2a^3$ **8**. *24* **9**. *4* **10**. *24*

11. *(2; –1; 3)* **12**. *(1; –1; 1)* **13**. *(2194/758; 1264/758; 860/758)*

14. *(14,25; 6,75; –3)* **15**. *(140; 75; 110)*

16. *(220; 340; 186)* **17.1**. *28* **17.2**. *9*

18. Собственным вектором соответствующим собственному числу *9* является вектор $\begin{pmatrix} b \\ 1,2b \end{pmatrix}$; собственному числу *(–2)* — вектор $\begin{pmatrix} a \\ -a \end{pmatrix}$, где $a,\ b$ — произвольные числа.

19. Собственным вектором соответствующим собственному числу *0* является вектор $\begin{pmatrix} -3a \\ a \\ 4a \end{pmatrix}$; собственному числу *1* — вектор $\begin{pmatrix} 5b \\ 0 \\ -7b \end{pmatrix}$; собственному числу *2* — вектор $\begin{pmatrix} 3c \\ c \\ -4c \end{pmatrix}$, где $a,\ b,\ c$ — произвольные числа.

§9

Упражнение 9.1.

С. *(14; 7; 15)* **Н.** *(11; 3; –7)*

Упражнение 9.2.

С. *(285; 194)* **Н.** *(47000; 33000)*

Упражнение 9.3.

С. *(40; 100; 80)* **Н.** *(3000; 200; 150)*

Упражнение 9.4.

С. Задача не имеет решений. Следовательно, в условиях задачи имеется ошибка.

Н. Задача не имеет решений.

Упражнение 9.5.

С. (*p; (19p – 28)/13; (46 – 34p)/39*), где *p* — любое число.

Н. (*p; (821p – 482)/583; (24 – 40p)/53*), где *p* — любое число.

Упражнение 9.6.

С. Если $a = 1$, то бесконечно много решений; $a = –1$, то нет решений; если a не равно $–1$ или 1, тогда единственное решение.

Н. Если $a = –2$, то нет решений; $a = 2$, то бесконечно много решений; если a не равно 2 или $–2$, тогда единственное решение.

Упражнение 9.7.

С. $y = 3x^2 + 10x + 3$ **Н.** $y = 4x^2 – 3x – 1$

Итоговые задания

1. *150; 225; 180* **2**. *50; 20; 18* **3**. *45; 50; 70* **4**. *300 кг*

5. *(60; 90; 45). Указание:* $\Delta = 0,912$ **6.** *(80; 150; 70). Указание:* $\Delta = 261$

7. нет решений **8**. *(2; –1; 3)* **9**. *(a; 16,5 – 2,5a; 0,5a – 2,5)*

10. *(2; –155; 5)* **11.** *(3; 50; –8)*

12. $a = 0$ или $a = 2$ или $–2$, то бесконечно много решений; для оставшихся значений a система имеет единственное решение.

13. $y = –3x^2 + 2x + 1$

§10

Упражнение 10.1.

С. $S + T = \begin{pmatrix} 17 & 23,1 & 7 \\ 16 & -6 & 25 \\ 13 & 20,3 & -6 \end{pmatrix}$; *S + R — невозможно; T – R — невозможно;*

$$T - S = \begin{pmatrix} -1 & -18,9 & -23 \\ -28 & 8 & 3 \\ -1 & 15,7 & 2 \end{pmatrix}; \qquad 0,2R = \begin{pmatrix} 0,24 & -0,4 \\ 0,4 & 1 \\ -3,4 & 0,2 \end{pmatrix};$$

$$-7T = \begin{pmatrix} -56 & -14,7 & 56 \\ 42 & -7 & -98 \\ -42 & -126 & 14 \end{pmatrix}; \qquad 3S - 5T = \begin{pmatrix} -13 & 52,5 & 85 \\ 96 & -26 & -37 \\ -9 & -11,1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Н. $K + L$ — *невозможно;* $L + M$ — *невозможно;*

$$K + M = \begin{pmatrix} 23 & -4,7 \\ 34 & -10 \\ 0 & 11 \end{pmatrix};$$ $L - M$ — *невозможно;*

$$K - M = \begin{pmatrix} 19 & 0,7 \\ -30 & 0 \\ -3,4 & 9 \end{pmatrix}; \qquad 4M = \begin{pmatrix} 8 & -10,8 \\ 128 & -20 \\ 6,8 & 4 \end{pmatrix};$$

$$1,1L = \begin{pmatrix} 8,8 & 23,1 & -8,8 \\ -6,6 & 1,1 & 14 \\ 6,6 & 19,8 & -2,2 \end{pmatrix}; \qquad 3K - 2,5M = \begin{pmatrix} 58 & -0,75 \\ -74 & -2,5 \\ -9,35 & 27,5 \end{pmatrix}.$$

Упражнение 10.2.

С. $$ST = \begin{pmatrix} 36 & 309,9 & 192 \\ 284 & 237,2 & -104 \\ 18,2 & -55 & -15,8 \end{pmatrix}; \qquad SR = \begin{pmatrix} -105 & 102 \\ 63 & -68 \\ 156,6 & -6,5 \end{pmatrix};$$

$$TS = \begin{pmatrix} 62,6 & 158,13 & 175,1 \\ 66 & -100,8 & -135 \\ 436 & -4,6 & 296 \end{pmatrix};$$ $R \cdot T$ — *невозможно.*

Н. $K \cdot L$ — *невозможно;* $$LM = \begin{pmatrix} 69,6 & -40,1 \\ 43,8 & 25,2 \\ 584,6 & -108,2 \end{pmatrix};$$

$K \cdot M$ — *невозможно;* $$LK = \begin{pmatrix} 185,8 & -106,5 \\ -144,8 & 147 \\ 165,4 & -122 \end{pmatrix}.$$

Упражнение 10.4.

С. $$S^T = \begin{pmatrix} 9 & 22 & 7 \\ 21 & -7 & 2,3 \\ 15 & 11 & -4 \end{pmatrix}; \quad R^T = \begin{pmatrix} 12 & 2 & -17 \\ -2 & 5 & 1 \end{pmatrix};$$ $P \cdot R^T$ — *невозможно;*

$$10P+S^T=\begin{pmatrix}89 & 42 & -73\\ -39 & 3 & 42{,}3\\ 75 & 29 & -24\end{pmatrix};\qquad R^T\cdot P=\begin{pmatrix}-18 & -4{,}6 & -54\\ -40 & 2{,}8 & 34\end{pmatrix}.$$

Н. $K^T=\begin{pmatrix}21 & 2 & -1{,}7\\ -2 & -5 & 10\end{pmatrix}$ **;** $L^T=\begin{pmatrix}8 & -6 & 6\\ 2{,}1 & 1 & 18\\ -8 & 14 & -2\end{pmatrix}$; $L^TM=\begin{pmatrix}-165{,}8 & 14{,}4\\ 66{,}8 & 7{,}33\\ 428{,}6 & -50{,}4\end{pmatrix}$

K^T-2M — *невозможно;* $K^T-2M^T=\begin{pmatrix}17 & -62 & -5{,}1\\ -7{,}4 & -15 & 8\end{pmatrix}$.

Упражнение 10.5.

С. $\begin{pmatrix}45{,}28 & 53\\ 63{,}12 & 75{,}2\\ 102 & 119\end{pmatrix}$ **Н.** $\begin{pmatrix}103{,}5 & 34{,}5\\ -26{,}5 & 23{,}25\end{pmatrix}$ **.**

Упражнение 10.6.

С. *(7; 5; 4,5)* **Н.** *(20; 18; 15)*

Итоговые задания

1. *a)* $\begin{pmatrix}-0{,}9 & 10\\ -0{,}2 & 2\end{pmatrix}$; *b)* $\begin{pmatrix}13{,}2 & -5\\ 0{,}6 & -16\end{pmatrix}$; c) не возможно;

d) $\begin{pmatrix}-6{,}3 & -25\\ -0{,}42 & -9\end{pmatrix}$; *e)* $\begin{pmatrix}-7{,}3 & 30{,}5\\ 0{,}4 & -8\end{pmatrix}$; *f)* $\begin{pmatrix}18\\ 238/15\end{pmatrix}$; g) не возможно;

h) $\begin{pmatrix}9{,}7\\ -10\end{pmatrix}$; *i)* $\begin{pmatrix}9{,}7\\ -10\end{pmatrix}$; *j)* $\begin{pmatrix}-3 & -0{,}2\\ 5 & 4\end{pmatrix}$; *k)* $\begin{pmatrix}1/3 & 2\end{pmatrix}$.

2. *a)* $\begin{pmatrix}-7/3 & 10 & 25\\ -21 & 13 & 11\\ 26{,}24 & 10 & 12\end{pmatrix}$; b) не возможно; c) не возможно;

d) не возможно; e) не возможно; f) не возможно;

g) не возможно; *h)* $\begin{pmatrix}3\\ 0{,}4\\ 2\end{pmatrix}$; *i)* $\begin{pmatrix}-2/3 & -16 & 8{,}12\\ 4 & 2 & 5\\ 9 & 3 & 8\end{pmatrix}$.

3. *a)* $\begin{pmatrix}0 & 3\\ 0 & -3\end{pmatrix}$; *b)* $\begin{pmatrix}3 & -6\end{pmatrix}$; c) не возможно; *d)* $\begin{pmatrix}3 & -12\end{pmatrix}$.

4. $AB = \begin{pmatrix} 18 & 33 \end{pmatrix}$; $AC = \begin{pmatrix} 117 & -24 & -15 \end{pmatrix}$; $BI = \begin{pmatrix} -2 & 8 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$;

BA и CA – не возможно; $IB = \begin{pmatrix} -2 & 8 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$; $BC - 2C = \begin{pmatrix} 56 & 60 & -56 \\ -1 & -45 & 31 \end{pmatrix}$.

5. $\begin{pmatrix} 23 & 19 & 10 \\ 12 & 25 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 24 \\ 48 \\ 60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2064 \\ 2448 \end{pmatrix}$.

6. 1–ое полугодие: $\begin{pmatrix} 28,4 & 68 \\ 30,2 & 33 \\ 40 & 15 \end{pmatrix}$; 3–ий квартал: $\begin{pmatrix} 22,1 & 21 \\ 16,8 & 19 \\ 23 & 8 \end{pmatrix}$;

план на будущий год: $\begin{pmatrix} 81 & 144 \\ 70,8 & 84 \\ 102 & 37,2 \end{pmatrix}$; выпуск 1–го квартала: $\begin{pmatrix} 8040 \\ 5424 \\ 3800 \end{pmatrix}$;

выпуск 2–го полугодия: $\begin{pmatrix} 15092 \\ 10856 \\ 8600 \end{pmatrix}$.

8. $\begin{pmatrix} 60 & 42,75 \\ 65,8 & 56,7 \end{pmatrix}$ **9**. $\begin{pmatrix} 29,7 & 26,75 \\ 44,6 & 34,9 \end{pmatrix}$

Ответы к КВИЗУ 2

Вариант 1

1–2.

a) $\begin{pmatrix} 5 & 8 & -6 \\ -21 & 3,4 & 7 \\ -4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 6 & -2 & 4 \\ 30 & -10 & 20 \\ -3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 60,8 & -24 & 0 \\ -97,56 & 86,4 & 112,8 \\ 0 & -12 & 19 \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} -8 & -19 & 17 \end{pmatrix}$; e) $\begin{vmatrix} 2 & -21 & -4 \\ 8 & 0,4 & 0 \\ -6 & 7 & -1 \end{vmatrix}$; *f) невозможно;* g) *–383,2*.

3. (*240; 320; 440*) **4.** (*p; 5,4p – 7,6*) **5.** *Ø* **6.** (5; 6; –7) **7.** 13

8. Если *a* не равен *–2,8*, тогда (*0; –2*);
если *a* = *–2,8*, тогда (*p; –2 – 0,4p*), где *p* любое число.

Вариант 2

1–2. *a)* $\begin{pmatrix} 4 & 0 & -5 \\ 1{,}1 & 8 & 2 \\ -8 & 12 & 3 \end{pmatrix}$; *b)* $\begin{pmatrix} -6 \end{pmatrix}$; *c)* $\begin{pmatrix} 24 & 16 & -7 \\ -131{,}8 & 11{,}2 & 33{,}4 \\ -272 & -59{,}2 & 131 \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} -16 & -24{,}6 & 26 \end{pmatrix}$; *e)* $\begin{pmatrix} 2 & 1{,}1 & -8 \\ 0 & 6 & 12 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; *f)* $\begin{pmatrix} 1 \\ -11 \\ 3 \end{pmatrix}$; g) *det B = –282,6.*

3. (2; 8; 5) **4.** *(p; 1,125 + 1,875p)* **5.** *(–4; 5; 6)* **6.** *Ø* **7.** 13

8. Если *c* не равен *6* или *–6*, тогда (*18/(c + 6); 9/(c + 6)*);

при *c = –6*, нет решения;

если *c = 6*, тогда (*p; 3 – 2p*), где *p* любое число.

§11

Упражнение 11.1.

C. 1) a) (11; –6), b) (9; –7), c) (–5; 8)

2) 1–ая: (18; 20; 90) 2–ая: (20; 19; 85) 3–я: (19; 22; 100)

4–ая: (21; 18,5; 80) **Указание**: *Det = –8*

H. 1) $A^{-1} = \begin{pmatrix} -28 & 11 & 8 \\ 49 & -19 & -14 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

2) 1–ая: (200; 140), 2–аяd: (220; 120), 3–я: (210; 124), 4–ая: (200; 150).

Упражнение 11.2.

C. 1) Не существует; 2) $\frac{1}{9}\begin{pmatrix} -3 & 6 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$; 3) $\frac{1}{10}\begin{pmatrix} 14 & 2 & -4 \\ 12 & -4 & -2 \\ -16 & 2 & 6 \end{pmatrix}$;

4) Не существует.

H. 1) $\frac{1}{7}\begin{pmatrix} -3 & -5 \\ -7 & -14 \end{pmatrix}$; 2) Не существует; 3) $\frac{1}{10}\begin{pmatrix} -16 & 6 & 8 \\ 38 & -8 & -14 \\ -12 & 2 & 6 \end{pmatrix}$;

4) Не существует.

Итоговые задания

1. $\frac{-1}{17}\begin{pmatrix} 7 & -5 \\ -9 & 4 \end{pmatrix}$; **2.** Не существует; **3.** $\begin{pmatrix} 3 & -4 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & -2 \end{pmatrix}$

4. $\frac{1}{8}\begin{pmatrix} -3 & 6 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ -1 & -6 & 3 \end{pmatrix}$ **5.** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 9 & -7 \\ 1 & 6 & 1 \end{pmatrix}$ **6.** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Криптография

Упражнение 11.А.1

С. КЫРГЫЗСТАН **Н**. ОШ ЮЖНАЯ СТОЛИЦА

Упражнение 11.А.2

С. 1) НАРЫН СЫРДАРЬЯ

2) *18 + 38 – 19 – 49 + 38 = 19*

37 + 50 + 31 – 45 – 37 + 50 – 31 – 41 + 39 = 30

Н. 1) ВАЛЕРИЙ ЧКАЛОВ

2) *29 – 33 + 50 + 36 – 27 + 30 – 42 + 32 – 39– 41 = 45*

46 + 30 – 28 = 41

Упражнение 11.А.3

С. 475 385 387 323 447 363 **Н.** 362 435 452 524 386 456

Упражнение 11.А.4

С. ВЕНА **Н.** БЕРН

Упражнение 11.А.5

С. MATRIX **Н.** PRINCE

Итоговые задания

1) –33 136 30 223 17 125 –3 72 50 235

2) 178 22 83 84 –23 72 122 –32 108 60 –30 73

3) GENIUS 4) IN LOVE 5) HEALTH 6) I SOLVE

7) REASON

§12

Упражнение 12.1

С. $Pf = 320 \cdot 48 + 576 \cdot 24 = 29184$ **Н**. $Pf = 35 \cdot 10 + 28 \cdot 12 = 686$

Упражнение 12.2

С. $C = 10 \cdot 11 + 17 \cdot 5 = 195$ **Н**. $C(4; 22) = 9{,}4$

Упражнение 12.3

С. $C_{min} = C(30; 70) = 1290$; $C = x – 3y + 1470$

Н. $C_{min} = C(250; 0) = 906$; $C = x + 1{,}4y + 656$

Упражнение 12.4

С. $C_{min} = C(0; 12) = 580$; $C = 0{,}5x – 2y + 604$

Н. $C_{min} = C(0; 120) = 3630$; $C = –y + 3750$

Итоговые упражнения

1. 30; 135 **1а**. 70; 75 **2**. $Pf(100; 60) = 7000$

3. $Pf(0; 78) = 12480$ $Pf(50; 48) = 12180$ $Pf(65; 39)=12090$

4. $C(0; 130) = 390$ **5**. $C(0; 14) = 280$ $C(5; 4) = 345$

6. C(0; 3500) = 20750 **6a**. 17000 – min

7. 30500 – min **7a**. 19250 – min

8. $C(200; 100) = 1300$ **9**. $C(400; 0) = 13900$ **10**. *49; 19*

11. **a)** $C(0; 3{,}5) = 7$ **b)** $C(0; 5) = 10$ **c)** $C(14/3; 8/3) = 58/3$

12. $z(4; 2) = 46$ **13**. $z(3; 6) = z(15; 0) = 45$

14. $z(4; 3) = 44$ –*min*; $z(2; 9) = 82$ –*max* **15**. $z(600; 400) = 5200$

Ответы к заданиям финальной работы

I. (400; 300; 500), (500; 200; 500), (500; 300; 400).

Указание $A^{-1} = \begin{pmatrix} -38 & -29 & 16 \\ -12 & -9 & 5 \\ 29 & 22 & -12 \end{pmatrix}$

II. $R = 111{,}85q$; $C = 93{,}75q + 452{,}5$; $q = 25$

III. $Pf(60; 100) = 370$; $Pf(36; 120) = 372$

IV. $C(4; 22) = 30.8$ **V.** $C_{min} = C(x; 0) = 2010$; $C = 5y + 2010$

VI. $C_{min} = C(220; 10) = 8740$; $C = 12x + 18y + 5920$

VII. PREP TO SAT $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & 4 \\ -7 & -4 & 13 \end{pmatrix}$

VIII. **(**$70; 90; 80$**)**

IX. a) $(436{,}25; \infty)$ b) $(720; \infty)$; c) $(400; 720)$.

X. a) 90^0; b) $\arccos\frac{-27}{\sqrt{18}\sqrt{65}}$; c) 45; d) $(8; 1)$;

e) $y = x - 7$; f) $y = 3x - 16$

XI. a) Если $a = 2$, тогда $(p; 2 - p)$, где p — любое число;

если $a = 5$ тогда нет решения; при всех остальных значениях a решение системы $(4/(a-5); 10/(5-a))$;

b) если $a = 19$, то $(p; 0{,}2(17 - 4p); 3{,}68 - 0{,}36p)$, где p — любое число;

при всех остальных значениях a система не имеет решение.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Кыдыралиев Сыргак Капарович,
доктор экономических наук,
кандидат-физико-математических наук,
профессор Американского Университета в Центральной Азии.
kydyraliev_s@auca.kg

Урдалетова Анаркуль Бурганаковна,
кандидат-физико-математических наук,
профессор, зав. кафедрой Математика
Кыргызско–Турецкого Университета «Манас».
anarkul.urdaletova@manas.edu.kg

Бурова Елена Сергеевна,
старший преподаватель
Американского Университета в Центральной Азии.
burova_e@auca.kg

БЛАГОДАРНОСТИ

Авторы выражают благодарность Инновационному колледжу АУЦА (TSI AUCA), OSUN Developing Teaching Professionals Small Grant, программе «Прикладная математика и информатика» Американского Университета в Центральной Азии и кафедре «Математика» Кыргызско–Турецкого Университета «Манас».