Министерство Образования и Науки
Кыргызской Республики
Кыргызско–Шведская
математическая школа

Задачи республиканских математических олимпиад 2020–21 и 2021–22 с решениями

Бишкек 2022

УДК 373.167.1:51
ББК 22.1 я 721
З-15

Рецензенты:
А.Б. Байзаков, доктор физ.–мат. наук, профессор,
Г.М. Дайырбекова, заслуженный учитель КР.

Кыдыралиев С.К. и другие
З-15 Задачи республиканских математических олимпиад 2020–21 и 2021–22 с решениями. Учеб. пособие.– Бишкек: 2022. – 112 с.

ISBN 978-9967-35-109-7

В книге собраны задачи, которые предлагались учащимся 6–11 классов на математических олимпиадах, проведенных в 2020–202 и 2021–2022 годах KSMS- Кыргызско–Шведской математической школой под эгидой Министерства образования и науки Кыргызской Республики. Задачи имеют различный уровень сложности и ориентированы на развитие логики, творческих способностей, мышления учащихся. В отличие от некоторых сборников олимпиадных задач, все предлагаемые задачи снабжены ответами и подробными решениями.

Книга предназначена для всех, кто интересуется математикой, в частности, для учащихся 5–11 классов и их учителей.

УДК 373.167.1:51
ББК 22.1 я 721

ISBN 978-9967-35-109-7

СОДЕРЖАНИЕ

Дорогие ученики!
Уважаемые учителя!

Вы держите в руках Сборник задач республиканских олимпиад по математике для учеников 6 — 11 классов.

Сборник составлен на основе заданий Первой и Второй Республиканских олимпиад по математике Министерства образования и науки КР и KSMS –Кыргызско–Шведской математической школы.

Над разработкой задач работали высококвалифицированные математики, включая представителей системы высшего и среднего образования, а также экспертов в области математических олимпиад.

С большим удовлетворением отмечаю динамично растущий интерес у учеников к царице наук — математике. Если на первой Республиканской олимпиаде по математике в 2020–2021 учебном году было 9009 участников, то уже для участия на Второй олимпиаде 2022 года зарегистрировались свыше 23 тысяч школьников со всей республики.

Отрадно, что большую активность проявляют регионы, а ученики общеобразовательных школ из даже самых отдаленных сел нашей страны занимают призовые места наряду с учениками специализированных столичных школ.

Данная книга содержит ответы и подробные решения, и я надеюсь, что она поможет нашим ученикам развить их математические знания и навыки.

Президент Кыргызской Республики Садыр Жапаров отметил, будущее Кыргызстана находится в руках нынешних школьников, и я надеюсь, что эта книга внесет свой весомый вклад в дело повышения качества образования в нашей стране.

С глубоким уважением и пожеланиями успехов,

Министр образования и науки
Кыргызской Республики Алмаз Бейшеналиев

ПРЕДИСЛОВИЕ

Математика появилась одновременно с появлением человека разумного. Она активно использовалась, и продолжает использоваться в земледелии, строительстве, торговле, … . Это обусловлено тем, что, как это выразил великий ученый Галилео Галилей: «Книга природы написана на языке математики». Со временем значение математики в человеческом обществе только возрастает. Продолжая быть основным научным инструментом в физике, химии, инженерии, математика становится все более необходимой для экономистов, социологов и других ученых. Поэтому для того, чтобы быть успешным в современном мире, желательно быть на ТЫ с математикой.

Большую роль в распространении и популяризации математических знаний играют математические олимпиады. Конечно, для достижения высоких результатов на математических олимпиадах, нужно иметь соответствующие способности. Но, не меньшее значение играют хорошая подготовка, регулярные занятия математикой, включающие в себя как решение стандартных задач из школьного курса, так и нестандартных, олимпиадных задач. Мы уверенны, что решение задач из данной книги, поможет вам улучшить свои знания и успешно выступить на будущих олимпиадах.

Следует отметить, что в отличие от обычных учебников и пособий, задачи в этой книге расположены в порядке, в котором предлагались на олимпиаде, а не в порядке повышения сложности. Поэтому, возможно, вы не сумеете с первого раза решить какую–нибудь задачу для седьмого класса, но при этом вам покорится задача для девятого класса. При неудаче не сдавайтесь сразу! Как говорится: дорога в тысячу километров начинается с первого шага. Главное — желание и настойчивость. Конечно, нужно будет поработать, но результат того стоит — Вы станете обладателем «хороших» мозгов.

Появлению этой книги на свет способствовали удачное сочетание нескольких факторов.

Это огромная работа коллектива Кыргызско–Шведской математической школы под руководством А. Ж. Жоробекова по организации и проведению олимпиад;

организационная поддержка министерства образования и науки Кыргызской Республики;

научно–методическая поддержка кафедры прикладной математики и информатики АУЦА;

творческие усилия авторов книги, сочинивших и собравших задачи, предложенные на олимпиадах.

Авторский коллектив книги:
председатель жюри 2020–21 года Урдалетова А.Б., председатель жюри 2021–22 года Кыдыралиев С.К., научный секретарь жюри Бурова Е.С.,
члены жюри: Асанбеков А.М., Долматов С.Л.,
Усенов И.А., Асанов Р.А., Доолотова А.А.

Надеемся, что наши олимпиады станут ежегодной доброй традицией. Информацию о них Вы можете получить на сайте Кыргызско–Шведской математической школы: https://www.ksms.kg/

Руководитель авторского коллектива,
профессор АУЦА Кыдыралиев С.К.

2020–2021 ПЕРВЫЙ ТУР. ЗАДАЧИ

6 КЛАСС

1. Анара старше Аскера на 2 года, а дядя Казак старше Анары в 5 раз. Сколько лет дяде Казаку, если он в 6 раз старше Аскера?

а) 8 б) 12 в) 20 г) 30 д) 40 е) 60

2. Числа 1, 2, 3, 4, 5, 11 разбейте на три пары так, чтобы сумма произведений чисел этих пар стала наименьшей. Чему равна эта сумма? а) 33 б) 69 в) 39 г) 63 д) 29 е) 23

3. По итогам школьной олимпиады по математике 64% участников получили призы. Довольными итогами олимпиады остались 90% участников, причем 70% из них получили призы. Какая часть недовольных результатами олимпиады участников получили призы?

а) 23% б) 20% в) 33% г) 21% д) 11% е) 10%

4. На доске записаны 7 слов: **АРТИШОК, АПОФЕОЗ, БЕНЕФИС, РАСПЛАВ, ЯВЛЕНИЕ, ТЕРПКИЙ, НЕЙТРОН.** За 1 сом можно поменять любую букву в любом слове на любую другую. Например, за 1 сом из слова РАСПЛАВ можно получить слово РИСПЛАВ (допускаются бессмысленные слова). Какое наименьшее количество сомов необходимо потратить, чтобы все 7 слов были одинаковыми?

а) 49 б) 45 в) 33 г) 36 д) 21 е) 29

5. Решите уравнение: $1 - (2 - (3 - (\dots - (2020 - x)))) = 2020$.

а) 1010 б) 2020 в) –1010 г) –2020 д) 3030 е) –3030

6. Автобус вышел из Каракола в Бишкек в 7 часов 39 минут и шел без остановки со скоростью 60 км/ч. Другой автобус вышел ему навстречу из Бишкека в 9 часов 43 минуты и тоже шел без остановок со скоростью 72 км/ч. На каком расстояний будут эти автобусы друг от друга за 15 минут до встречи? Расстояние от Каракола до Бишкека 400 км.

а) 12 б) 35 в) 42 г) 50 д) 45 е) 33

7. Каков периметр треугольника, одна сторона которого равна 2 м, другая 4 м, если длины всех трех сторон треугольника выражены целым числом метров.

а) 11 б) 8 в) 7 г) 15 д) 13 е) 12

8. Сагын, Камал и Жоомарт приготовили и съели равными долями яичницу. При этом Сагын дал 4 яйца, Камал — 7 яиц. Жоомарт дал 44 сома. Сколько из этих денег должен получить Камал?

а) 40 б) 28 в) 37 г) 35 д) 33 е) 42

9. Расшифруйте пример на сложение: $XY + X = YZZ$, зная, что разные буквы обозначают разные цифры. Найдите сумму $X + Y + Z$.

а) 6 б) 7 в) 8 г) 9 д) 10 е) 11

10. Сумма двух чисел равна 1347. Известно, что если зачеркнуть число 21, на которое заканчивается первое число, то получится половина второго числа. Найти разность исходных чисел.

а) 1295 б) 1128 в) 1324 г) 726 д) 1281 е) 833

7 КЛАСС

1. Сергей из Лазаревки ехал в Долматово со скоростью 20 км в час, а обратно со скоростью 80 км в час. Найти среднюю скорость движения.

а) 30 б) 32 в) 36 г) 40 д) 48 е) 50

2. Сколько 8–значных чисел, которые ни начинаются, ни оканчиваются восьмеркой, существует?

а) 62000000 б) 81000000 в) 64000000
г) 63000000 д) 72000000 е) 74000000

3. На рисунке прямоугольник разбит прямыми линиями, которые параллельны его сторонам.

m		54	66
	104		143
25	40		n

Найдите сумму m и n, используя площади некоторых прямоугольников, которые указаны на рисунке.

а) 8 б) 5 в) 85 г) 93 д) 27 е) 75

4. Акмат печатает электронное письмо другу пальцами одной руки. При этом, он нажимает клавиши клавиатуры в следующем порядке: большим, указательным, средним, безымянным, мизинцем, безымянным, средним, указательным, и далее по циклу. Каким пальцем был набран 2021–й символ?

а) большим б) указательным в) средним
г) безымянным д) мизинцем е) точный ответ невозможен

5. Каждый из 5 друзей положил в общую копилку некоторое количество сомов. Если бы первый из друзей положил вдвое больше, то в копилке стало бы на 15% больше денег. Если бы вместо него второй из друзей положил вдвое больше, то в копилке стало бы на 17% больше, если третий — то на 29%, если четвертый — то на 24%. Насколько % увеличится изначальное количество общих денег в копилке, если пятый из друзей закинет вдвое больше?

а) 15% б) 46% в) 23% г) 6% д) 25% е) 31%

6. Найдите значение выражения:

$$\frac{505\cdot1010\cdot2020\cdot4040+1010\cdot2020\cdot4040\cdot8080+2020\cdot4040\cdot8080\cdot16160+64}{1010\cdot2020\cdot4040\cdot8080+2020\cdot4040\cdot8080\cdot16160+4040\cdot8080\cdot16160\cdot32320+1024}$$

а) $\frac{1}{1024}$ б) $\frac{1}{32320}$ в) $\frac{1}{16}$ г) $\frac{1}{2020}$ д) $\frac{1}{8080}$ е) $\frac{1}{4}$

7. Разность удвоенного знаменателя и числителя дроби равна 153. После сокращения этой дроби получили 5/7. Найти сумму удвоенного числителя и знаменателя исходной дроби.

а) 289 б) 315 в) 242 г) 350 д) 453 е) 323

8. Известно, что в году *T* было 53 пятницы. Каким днем недели было третье января этого года?

а) Понедельник б) Вторник в) Среда
г) Четверг д) Пятница е) Суббота

9. В трех мешках лежали груши, по 78 штук в каждом. Из первого мешка взяли несколько груш, из второго в два раза больше, а из третьего взяли столько, сколько осталось в первом и втором мешках вместе. Сколько груш осталось в трех мешках вместе?

а) 60 б) 78 в) 67 г) 75 д) 83 е) 92

10. Длины всех сторон треугольника выражаются целым числом метров, а периметр равен 13 м. Сколько разных треугольников такого вида существует?

а) 3 б) 4 в) 5 г) 6 д) 7 е) 8

8 КЛАСС

1. Сколькими разными способами можно выстроить в ряд все буквы слова БИШКЕК?

а) 6 б) 24 в) 36 г) 120 д) 360 е) 720

2. В чемпионате Зулумбии по футболу участвовали 12 команд, причем каждая команда сыграла с каждой из команд по 2 раза. Сколько игр было сыграно?

а) 132 б) 24 в) 48 г) 64 д) 164 е) 264

3. Сколько натуральных решений у уравнения $x^2 - y^2 = 125$?

а) 0 б) 1 в) 2 г) 3 д) 4 е) ∞

4. Бизнесмены решили создать автопарк. Первый бизнесмен для автопарка отдал 70 одинаковых автомобилей, второй — 40 таких же автомобилей, а третий внес 44 миллиона сомов. Сколько денег (в млн) из этих 44 миллионов полагается первому бизнесмену, для того чтобы вклад в общее дело каждого из трех бизнесменов одинаков?

а) 20 б) 40 в) 35 г) 140 д) 70 е) 10

5. Найдите произведение всех значений параметра a, при которых сумма квадратов корней уравнения $x^2 - 3ax + a^2 = 0$ равна $0,28$.

а) 0,2 б) −0,49 в) −0,04 г) −4 д) 1 е) 0,0529

6. Распределите в порядке возрастания дроби: $A = \frac{10000000000}{10000000001}$;

$$B = \frac{20000000001}{20000000003};\ C = \frac{30000000001}{30000000004};\ D = \frac{40000000001}{40000000005}.$$

а) A < B < C < D б) D < C < B < A в) B < C < A < D
г) D < A < C < B д) A < D < C < B е) C < A < D < B

7. Найти значение выражения:

$$\frac{(11+9)(11^2+9^2)(11^4+9^4)(11^8+9^8)...(11^{1024}+9^{1024})(11^{2048}+9^{2048})+9^{4096}}{11^{4096}}$$

а) $\frac{1}{2}$ б) 4 в) $\frac{1}{20}$ г) $\frac{1}{16}$ д) $\frac{11}{302}$ е) $\frac{1}{32}$

8. Пройдя две трети пути от Токмака, поезд уменьшил скорость на 20% и прибыл на место на 24 минуты позже срока. Сколько часов поезд был в пути?

а) 2,8 б) 3,5 в) 4,2 г) 5,2 д) 5,6 е) 6,5

9. Бригада швей планирует сшить определенное количество платьев. Если они будут шить по 33 платья в день, то им потребуется на 2 дня больше, чем планируется. Если же они будут шить по 42 платья в день, то им потребуется на 1 день меньше, чем планируется. Сколько платьев должна сшить бригада по плану?

а) 506 б) 462 в) 528 г) 398 д) 650 е) 450

10. Нурбек рассказывает Тамаре: «Знаете ли, произошла удивительная история. Когда я выстроил своих солдатиков в две шеренги, остался один лишний. Когда я выстроил их в три шеренги, то остались два лишних солдатика, когда в четыре — три и так далее, когда я выстроил их в восемь шеренг, то остались семь лишних солдатиков». Определите, сколько солдатиков у Нурбека, если все они помещаются в трех коробках, каждая из которых вмещает 300 солдатиков.

а) 420 б) 328 в) 864 г) 726 д) 810 е) 839

9 КЛАСС

1. Сколько решений в натуральных числах имеет уравнение $XY - 20X - 20Y = 2020$?

а) 2 б) 3 в) 4 г) 6 д) 10 е) 20

2. Сколько действительных решений имеет система: $\begin{cases} x + xy + y = 5 \\ x^2 + y^2 = 16 \end{cases}$.

а) 1 б) 2 в) 3 г) 4 д) 5 е) 6

3. Пусть *a, b, c* будут сторонами треугольника *ABC*. Каким должен быть этот треугольник, чтобы a^2, b^2, c^2 могли быть также сторонами другого треугольника?

а) Остроугольным б) Прямоугольным в) Равносторонним
г) Равнобедренным д) Тупоугольным е) Такого нет

4. Вычислите: $\left(4 \cdot 10^{2020} - 1\right) : \left(4 \cdot \underbrace{3...33}_{2020} + 1\right)$.

а) 2 б) 4 в) 3 г) 1 д) 7 е) 10

5. Сколько восьмизначных чисел, делящихся на 5, можно составить путем перестановки цифр числа 37735372?

а) 20 б) 400 в) 35 г) 140 д) 70 е) 10

6. Решить уравнение: $(x+3)^{2019}+(x+3)^{2018}\cdot(x-3)+$

$+(x+3)^{2017}\cdot(x-3)^2+\ldots+(x+3)\cdot(x-3)^{2018}+(x-3)^{2019}=0$.

а) 1 б) 3 в) $3+\sqrt[2019]{3}$ г) 0 д) $3-\sqrt[2019]{3}$ е) – 3

7. Пусть $a^2+ab+b^2+3bc+5c^2+8cd+13d^2+21d+22.05=0$.
Чему равно (a + b + c + d) ?

а) – 2,1 б) 3 в) 9 г) 5,7 д) 27 е) –5

8. Число ***А*** является произведением трех последовательных целых чисел. Сумма трех частных, полученных от деления ***А*** на каждый его сомножитель равна 47. Найдите ***А*.**

а) –120 б) 120 в) 24 г) – 60 д) 210 е) 288

9. Найдите произведение двух натуральных чисел, зная их сумму 145 и общий делитель 29.

а) 4120 б) 3128 в) 3364 г) 7260 д) 2810 е) 8288

10. В 9 часов от пристани отошел теплоход и вернулся обратно в 15 часов 18 минут. Его скорость по течению реки составила 22 км/ч, против течения — 20 км/ч. Сколько всего километров проплыл теплоход?

а) 152 б) 128 в) 144 г) 126 д) 132 е) 98

10 КЛАСС

1. Известно, что основания трапеции равны 2 и 6 метрам. Найдите длину отрезка, который параллелен основаниям, соединяет боковые стороны трапеции и проходит через точку пересечения ее диагоналей.

а) 2,4 м б) 3 м в) 3,2 м г) 3,6 м д) 4 м е) 4,8 м

2. Найдите последние 3 цифры числа $(1!)^3+(2!)^3+(3!)^3+\ldots+(2020!)^3$.

а) 509 б) 167 в) 215 г) 049 д) 614 е) 812

3. Сколько корней у уравнения $\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}+\sqrt{x+3}=\sqrt{x}$?

а) 0 б) 2 в) 3 г) 4 д) 5 е) 6

4. Диагонали первого ромба равны 4 и 6. Второй ромб получается поворотом первого на 90° относительно его центра. Найдите площадь пересечения этих ромбов.

а) 12/5 б) 9,6 в) 8/5 г) 2,4 д) 24 е) 12

5. Решите неравенство $\sqrt{x^2-1} \le \sqrt{5x^2-1-4x-x^3}$.

а) $x \in (-\infty; -1]$ б) $x \in \{2\}$ в) $x \in (-1;\ 4)$

г) $x \in (-\infty; -1] \cup \{2\}$ д) $x = 3$ е) $x \in (-\infty;\ 4)$

6. Известно, что $f(x) = x^3 + 6x^2 + 12x + 6$.

Решите уравнение $f(f(f(f(x)))) = 7$.

а) 3 б) $12 + \sqrt[12]{6}$ в) $12 + \sqrt[12]{6}$ г) $\sqrt[81]{9} + 2$ д) $\sqrt[81]{9} - 2$ е) 2

7. Найдите сотый член последовательность чисел: 10, 15, 25, 40, 60, 85, … .

а) 89320 б) 24760 в) 52750 г) 25570 д) 45610 е) 75620

8. Три числа являются членами арифметической прогрессии, три числа — членами геометрической прогрессии. Складывая соответствующие члены этих прогрессий, получим 10,5; 16; −26,5. Зная, что сумма членов арифметической прогрессии равна 21, найдите произведение членов геометрической прогрессии.

а) 1331 б) 512 в) 343 г) –1150 д) 729 е) –890

9. Найдите ($a - b - c - d$), зная, что: $\begin{cases} a + 7b + 3c + 5d = 40, \\ 8a + 4b + 6c + 2d = -40, \\ 2a + 6b + 4c + 8d = 40, \\ 5a + 3b + 7c + d = -40. \end{cases}$

а) 5 б) 10 в) 15 г) 0 д) –5 е) –10

10. В магазине было 6 бочек напитка максым. Емкости бочек разные: 15 л, 16 л, 17 л, 18 л, 19 л и 31 л. Эсен купил ровно в 1,5 раза больше максыма, чем Бегимай. Продавец был рад, что не пришлось раскупоривать бочки и осталась одна целая бочка. Сколько литров максыма в оставшейся бочке?

а) 15 б) 16 в) 17 г) 18 д) 19 е) 33

11 КЛАСС

1. Найдите площадь боковой поверхности конуса, если известно, что его осевое сечение является правильным треугольником со стороной 6 м.

а) 3π м^2 б) 6π м^2 в) 3π м^2 г) 12π м^2 д) 18π м^2 е) 6π м^2

2. Для скольких натуральных чисел n выражение $n!+5$ является квадратом натурального числа?

а) 0 б) 1 в) 2 г) 3 д) 4 е) 5

3. Ширину и длину параллелепипеда увеличили на 1 см, а высоту уменьшили на 9 см. Несмотря на эти изменения, новый параллелепипед имеет тот же объем что исходный. Каков объем параллелепипеда, если ширина и длина параллелепипеда равны, а высота нового параллелепипеда в 4 раза больше ширины исходного параллелепипеда?

а) 18 б) 25 в) 50 г) 100 д) 200 е) 400

4. Если n – натуральное число, то на какую цифру оканчивается число $24^{5+2n}\cdot 36^6\cdot 17^3$?

а) 2 б) 3 в) 4 г) 5 д) 6 е) 8

5. Решите в простых числах уравнение $a=b^c+1$. В ответе укажите значение выражения $abc(a+b+c)$.

а) 1575 б) 180 в) 149891 г) 1980 д) 11583 е) 2020

6. Решите неравенство: $\left|\dfrac{5x^3+35x^2-x-1}{x+7}\right|=\left|5x^2-1\right|+\left|\dfrac{6}{x+7}\right|$.

а) $(-\infty;-35)\cup(-35;-7)\cup(-7;+\infty)$ б) $(-35;-7)\cup(-7;35)$

в) $(-\infty;-7)\cup(-7;+\infty)$ г) $(-\infty;-7)\cup(-7;29)\cup(31;+\infty)$

д) $(-\infty;-7)\cup(-7;0)\cup(0;35)\cup(35;+\infty)$

е) $(-\infty;-7)\cup(-7;151)\cup(151;+\infty)$

7. Три числа являются членами арифметической прогрессии, три числа — членами геометрической прогрессии. Складывая соответствующие члены этих прогрессий, получим 1, 11, 24. Зная, что произведение членов геометрической прогрессии равно 216, найдите произведение членов арифметической прогрессии.

а) 1200 б) 345 в) –120 г) –1150 д) 1245 е) –890

8. Айдар купил круглый арбуз диаметром 32 см, толщина корки которого составила 2 см. Сколько процентов стоимости этого арбуза истрачено на корку?

а) 55 б) 29 в) 41 г) 33 д) 18 е) 26

9. Найдите периметр треугольника, у которого сумма катетов больше гипотенузы на 8 сантиметров, а высота, опущенная на гипотенузу, равна 9,6 см.

а) 32 б) 20 в) 54 г) 48 д) 40 е) 52

10. Найти разность длин сторон прямоугольника с периметром 28 см и площадью ($48 + log_{783}850$) см^2.

а) 3 б) 4 в) 4,5 г) 4,8

д) имеется несколько решений е) нет решения

2020–2021 ВТОРОЙ ТУР. ЗАДАЧИ

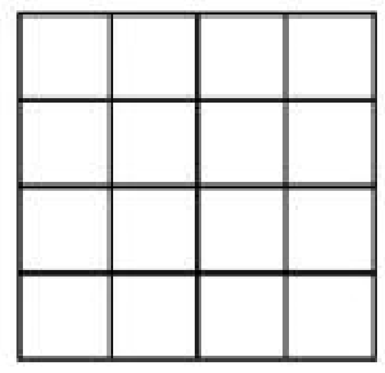
9 КЛАСС

1. Найдите сумму всех элементов таблицы:

3	0,5	– 2	– 4,5	– 7	– 9,5	– 12	14,5	– 17
– 17	– 14	– 11	– 8	– 5	– 2	1	4	7
–11,8	– 9,6	– 7,4	– 5,2	– 3	– 0,8	1,4	3,6	5,8
23	17	11	5	– 1	– 7	– 13	– 19	– 25
– 1,8	– 1,1	– 0,4	0,3	1	1,7	2,4	3,1	3,8
25	19,5	14	3	8,5	– 2,5	– 8	– 13,5	– 19
– 8,2	– 4,9	– 1,6	1,7	11,6	5	8,3	14,9	18,2
– 4	7	– 37	– 26	– 15	18	29	40	51
0	2,25	4,5	6,75	18	9	11,25	13,5	15,75

2. На классной доске написаны числа 1; 2; 3; … 2021; 2022. Разрешается стереть два любых числа и записать вместо них их сумму или разность. Понятно, что после многократного повторения этой операции на доске останется одно число. Докажите, что это число не может быть нулем.

3. Маша везет на медведе 17 пирожков: с мясом, с рисом, с картошкой. При этом пирожков с рисом в два раза больше, чем с мясом. Сколько пирожков с картошкой у Маши, если их больше, чем пирожков с мясом, и меньше, чем с рисом?



4. Сеть дорог состоит из 40 отрезков по 1 километру, как показано на рисунке. Какова наименьшая длина непрерывного маршрута, содержащего все отрезки?

5. Даны положительные целые числа *a, b, c, d.* Найдите наибольшее значение *bd,* если $ab + cd = 2020$.

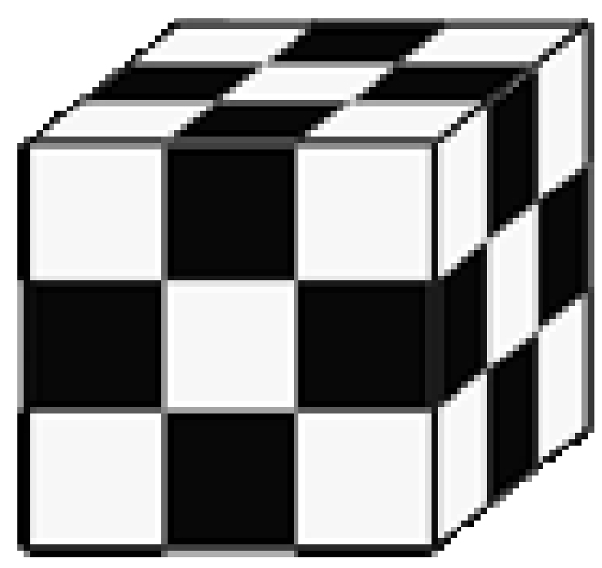
6. График квадратичной функции $f(x)= x^2 + 2px - p^2 + 7p - 2020$ пересекает координатные оси в трех точках: *A, B* и *C.* При каком значении *p* произведение длин отрезков *OA, OB* и *OC* будет наименьшим? (О — начало системы координат.)

7. Найдите все целые x и y так, чтобы $(xy + 5)^2 = x^2 + y^2$.

8. Вычислите сумму: $1\cdot(-1)^{s(1)}+2\cdot(-1)^{s(2)}+3\cdot(-1)^{s(3)}+\ldots$

$+\ k\cdot(-1)^{s(k)}+\ldots+2021\cdot(-1)^{s(2021)}$. Здесь $s(k)=\dfrac{k^2+k+2}{2}$.

9. Первый грузовик движется по прямой дороге, ведущей на юг, в то же время второй грузовик движется по другой прямой дороге и направляется на восток. В 13:30 первый грузовик находился ровно в 7 километрах к северу от второго грузовика. Если оба грузовика движутся с постоянной скоростью 30 километров в час, в какое время они будут точно в 13 километрах друг от друга?



10. Мышь грызет кусочек сыра в форме куба с ребром 3, разбитый на 27 единичных кубиков. Когда она съедает какой – то кубик, то переходит к следующему, который имеет общую грань с предыдущим. Может ли мышь, действуя таким образом, скушать весь кусок сыра, кроме центрального единичного кубика? Аргументируйте свой ответ.

10 КЛАСС

1. В два сосуда налили одинаковое количество жидкости. В итоге первый заполнен на три четверти, второй на четыре пятых. Какая часть второго сосуда останется заполненной, если из него наполнить первый сосуд?

2. Сколько корней имеет уравнение $1{,}5^{x+1} = \log_7 x + 3$?

3. В старинном городе две башни расположены на расстоянии 48 метров друг от друга, первая высотой 27 метров, вторая — 33 метра. На них живут во́роны, которых подкармливает служитель. Однажды, он положил кусок мяса между башнями. Увидев это, с вершины первой башни слетел ворон, схватил мясо и взлетел на вершину второй башни. На каком расстоянии от второй башни было мясо, если ворон затратил на весь полет минимально возможное время? Предполагаем, что ворон летел с постоянной скоростью.

4. Вычислите сумму: $1\cdot(-1)^{s(1)}+2\cdot(-1)^{s(2)}+3\cdot(-1)^{s(3)}+\ldots + k\cdot(-1)^{s(k)}+\ldots+2021\cdot(-1)^{s(2021)}$. Здесь $s(k)=\dfrac{k^2+k+2}{2}$.

5. Привести пример многочлена $P(x)$ степени 2021, для которого выполняется тождество: $P(x) + P(2020 - x) = 2020$.

6. На доске записано натуральное число X. Кайрат дописал справа к нему четыре цифры. Полученное число равно сумме всех натуральных чисел от 1 до X. Найти число X.

7. Первый грузовик движется по прямой дороге, ведущей на юг, в то же время второй грузовик движется по другой прямой дороге и направляется на восток. В 13:30 первый грузовик находился ровно в 7 километрах к северу от второго грузовика. Если оба грузовика движутся с постоянной скоростью 30 километров в час, в какое время они будут точно в 13 километрах друг от друга?

8. Один из катетов прямоугольного треугольника площадью 30 м^2, меньше гипотенузы на 8 м. Найдите другой катет этого треугольника, зная, что длины сторон целые числа в метрах.

9. Найдите сумму всех натуральных решений неравенства $(19x - 2x^2 - 44)\log_5(2x - 5) \geq 0$.

10. Сколько решений в целых числах у уравнения $XY^2Z^3 = 576$?

11 КЛАСС

1. График квадратичной функции $f(x)= x^2 + 2px - p^2 + 7p - 2020$ пересекает координатные оси в трех точках: *A, B* и *C*. При каком значении *p* произведение длин отрезков *OA, OB* и *OC* будет наименьшим. (О — начало системы координат.)

2. Пусть b_1, b_2, b_3, ... члены геометрической прогрессии. Вычислите значение выражения $\sqrt{\log_x y}$,

где $x = b_1 \cdot b_{156} \cdot b_{311} \cdot \ldots \cdot b_{2016}$; $y = b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \cdot \ldots \cdot b_{2016}$.

3. Найти решение уравнения $\sqrt{6}\cos x + \sqrt{2}|\sin x| = 2$.

4. Даны положительные целые числа *a, b, c, d.* Найдите наибольшее значение *bd,* если $ab + cd = 2020$.

5. На доске записано натуральное число X. Кайрат дописал справа к нему четыре цифры. Полученное число равно сумме всех натуральных чисел от 1 до X. Найти число X.

6. Углы треугольника *ABC* находятся в отношении 1:5:6 к друг другу. Большая сторона этого треугольника *AC* равна 40 сантиметрам. Чему равна высота *BH*, проведенная к этой стороне?

7. Решите неравенство: $(2x^2+ 5x + 19)^{1/2} - (2x^2 - 3x - 5)^{1/2} > 4$.

8. Один из катетов прямоугольного треугольника площадью 30 м^2, меньше гипотенузы на 8 м. Найдите другой катет этого треугольника, зная, что длины сторон выражаются целыми числами.

9. Найти номер члена последовательности *1, 8, 22, 43, 71...,* который равен *35351.*

10. Сколько корней имеет уравнение $1{,}5^{x+1} = \log_7 x + 3$?

2020–2021 ПЕРВЫЙ ТУР. РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

6 КЛАСС

1–задача

Анара старше Аскера на 2 года, а дядя Казак старше Анары в 5 раз. Сколько лет дяде Казаку, если он в 6 раз старше Аскера?

Решение Возьмем возраст Аскера за X лет, тогда возраст Аси ($X + 2$) года, а возраст дяди Казака $(X + 2)5$. Тогда $(X + 2)5 = 6X \Rightarrow X = 10$. Отсюда $6X = 60$ – возраст дяди Казака. **Ответ:** 60.

2–задача

Числа 1, 2, 3, 4, 5, 11 разбейте на три пары так, чтобы сумма произведений чисел этих пар стала наименьшей. Чему равна эта сумма?

Решение Для того чтобы сумма произведений была минимальной, из множества выберем наименьшее число и умножим на наибольшее, и получим: $1 \cdot 11 = 11$, затем из оставшихся чисел, по такому же принципу, получаем:
$2 \cdot 5 = 10$. Так как для третьей пары: $3 \cdot 4 = 12$, ответ:
$1 \cdot 11 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 4 = 33$. **Ответ:** 33.

3–задача

По итогам школьной олимпиады по математике 64% участников получили призы. Довольными итогами олимпиады остались 90% участников, причем 70% из них получили призы. Какая часть недовольных результатами олимпиады участников получили призы?

Решение Пусть, А количество участников. Тогда, число довольных итогами олимпиады призеров $0,7 \cdot 0,9A = 0,63A$. Таким образом, среди призеров: 0,64А – 0,63А = 0,01А участников, недовольных результатами олимпиады. А так как недовольных всего 0,1А, среди них призы получили: $0,01A : 0,1A = 0,1 = 10\%$. **Ответ:** 10%.

4–задача

На доске записаны 7 слов: **АРТИШОК, АПОФЕОЗ, БЕНЕФИС, РАСПЛАВ, ЯВЛЕНИЕ, ТЕРПКИЙ, НЕЙТРОН.** За 1 сом можно поменять любую букву в любом слове на любую другую. Например, за 1 сом из слова

РАСПЛАВ можно получить слово РИСПЛАВ (допускаются бессмысленные слова). Какое наименьшее количество сомов необходимо потратить, чтобы все 7 слов были одинаковыми?

Решение Запишем слова в столбик:

А	Р	Т	И	Ш	О	К
Б	Е	Н	Е	Ф	И	С
Р	А	С	П	Л	А	В
А	П	О	Ф	Е	О	З
Я	В	Л	Е	Н	И	Е
Т	Е	Р	П	К	И	Й
Н	Е	Й	Т	Р	О	Н

После всех замен буквы в каждом столбце должны стать одинаковыми. Число замен будет наименьшим, если в каждом столбце сохранить наиболее частую букву (любую из них, если таких букв несколько). Например, во втором столбце нужно оставить букву Е, в шестом столбце можно оставить буквы О или И. В обоих случаях, для О или И, чтобы получились одинаковые буквы, потребуется четыре замены. В первом столбце понадобится 5 замен, во втором – 4 замены, в третьем – 6, в четвертом – 5, в пятом – 6, в шестом – 4, в седьмом – 6. Минимальное количество замен равно $5+4+6+5+6+4+6=36$. **Ответ:** 36 сомов.

5–задача

Решите уравнение: $1 - (2 - (3 - (\ldots - (2020 - x)))) = 2020.$

Решение $1 - 2 + 3 - 4 \ldots + 2019 - 2020 + x = 2020 \Rightarrow$

$(1 - 2) + (3 - 4) \ldots + (2019 - 2020) + x = 2020 \Rightarrow$

$-1010 + x = 2020 \Rightarrow x = 3030.$ **Ответ:** $3030.$

6–задача

Автобус вышел из Каракола в Бишкек в 7 часов 39 минут и шел без остановки со скоростью 60 км/ч. Другой автобус вышел ему навстречу из Бишкека в 9 часов 43 минуты и тоже шел без остановок со скоростью 72 км/ч. На каком расстояний будут эти автобусы друг от друга за 15 минут до встречи? Расстояние от Каракола до Бишкека 400 км.

Решение Эта задача на внимание. В ней много лишней информации. Для ответа на вопрос достаточно подсчитать, что за 15 минут, то есть за 0,25 часа первый автобус пройдет:

$60 \cdot 0,25 = 15$ км; второй: $72 \cdot 0,25 = 18$ км, и сложить эти числа: $15 + 18 = 33$ км. **Ответ:** 33 км.

7–задача

Каков периметр треугольника, одна сторона которого равна 2 м, другая 4 м, если длины всех трех сторон треугольника выражены целым числом метров.

Решение Обозначим длину третьей стороны через X. Принимая во внимание то, что сумма длин двух сторон треугольника всегда больше длины третьей, а разность длин двух сторон треугольника всегда меньше длины третьей, тогда: $2 + 4 > X$, и $4 - 2 < X$. Отсюда $2 < X < 6$, то есть X равен или 3, или 4, или 5. Соответственно, периметр треугольника будет или 9 м, или 10 м, или 11 м. Среди вариантов ответов имеется только ответ 11 м. **Ответ:** 11 м.

8–задача

Сагын, Камал и Жоомарт приготовили и съели равными долями яичницу. При этом Сагын дал 4 яйца, Камал — 7 яиц. Жоомарт дал 44 сома. Сколько из этих денег должен получить Камал?

Решение

На первый взгляд, так как было 11 яиц, на каждое яйцо приходится 4 сома. Поэтому Сагын должен получить: $4 \cdot 4 = 16$ сомов, а Камал: $7 \cdot 4 = 28$ сом. Но этот подход неправилен. Итак, трое съели 11 яиц. Если мысленно разделить каждое яйцо на 3 части, то будет 33 части. Каждый съел по 11 таких частей. Яйца, которые выделил Сагын, образуют 12 частей: 11 из них он съел сам и только одна досталась Жоомарту. В то же время, из яиц выделенных Камалом, Жоомарту достались 10 частей. Таким образом получается, что Сагын должен получить деньги за одну часть: $44 : 11 = 4$ сома, а Камал должен получить 40 сомов.

Ответ: 40 сомов.

9–задача

Расшифруйте пример на сложение: $XY + X = YZZ$, зная, что разные буквы обозначают разные цифры. Найдите сумму $X + Y + Z$.

Решение Результат сложения двузначного и однозначного чисел указывает на то, что буква X может быть только 9, а $Y = 1$. Соответственно, $Z = 0$. **Ответ:** 10.

10–задача

Сумма двух чисел равна 1347. Известно, что если зачеркнуть число 21, на которое заканчивается первое число, то получим половину второго числа. Найти разность исходных чисел.

Решение Первое число можно записать в виде $100a + 21,$ где a — половина второго числа. Тогда, $(100a + 21) + 2a = 1347.$ Отсюда, $102a = 1326$ и $a = 13.$ Следовательно, второе число равно 26, а первое число равно 1321. Тогда разность этих чисел $1321 - 26 = 1295$. **Ответ:** 1295.

7 КЛАСС

1–задача

Сергей из Лазаревки ехал в Долматово со скоростью 20 км в час, а обратно— 80 км/ч. Найти среднюю скорость движения.

Решение Расстояние от A до B можно взять за 80 км. Тогда время туда 4 часа а обратно 1 час. Пройденный путь 160 км делим на 5 часов и получаем 32 км в час. **Ответ:** 32 км/час.

2–задача

Сколько 8–значных чисел, которые ни начинаются, ни оканчиваются восьмеркой, существует?

Решение Так как число не может начинаться с нуля, и не должно содержать восьмерку на первом месте, то для первой цифры числа имеем 8 вариантов, для цифр со второго по седьмое имеем по 10 вариантов каждая, и для последней цифры, так как мы также исключаем восьмерку, имеем 9 вариантов. Итак, ответ: $8 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 9 = 72000000.$

Ответ: 72000000.

3–задача

На рисунке прямоугольник разбит прямыми линиями, которые параллельны его сторонам.

m		54	66
	104		143
25	40		n

Найдите сумму *m* и *n,* используя площади некоторых прямоугольников, которые указаны на рисунке.

а) 8 б) 5 в) 85 г) 93 д) 27 е) 75

Решение Из рисунка можно составить пропорции:

$$\frac{104}{40}=\frac{143}{n} \Rightarrow n=\frac{143\cdot 40}{104}=55, \quad \frac{m}{25}=\frac{66}{n} \Rightarrow m=\frac{66\cdot 25}{n}=\frac{66\cdot 25}{55}=30.$$

Ответ: $n + m = 85$

4–задача

Акмат печатает электронное письмо другу пальцами одной руки. При этом, он нажимает клавиши клавиатуры в следующем порядке: большим, указательным, средним, безымянным, мизинцем, безымянным, средним, указательным, и далее по циклу. Каким пальцем был набран 2021–й символ?

Решение Цикл последовательности пальцев имеет длину 8. Поскольку остаток от деления числа 2021 на 8 равен 5, то 2021–й символ будет набран тем же пальцем, что и 5–й.

Ответ: мизинец.

5–задача

Каждый из 5 друзей положил в общую копилку некоторое количество сомов. Если бы первый из друзей положил вдвое больше, то в копилке стало бы на 15% больше денег. Если бы вместо него второй из друзей положил вдвое больше, то в копилке стало бы на 17% больше, если третий — то на 29%, если четвертый — то на 24%. Насколько % увеличится изначальное количество общих денег в копилке, если пятый из друзей закинет вдвое больше?

Решение

Если бы все друзья положили вдвое больше, то денег стало бы на 100% больше. Из них 15% приходятся на первого из друзей, 17% – на второго, 29% – на третьего, 24% – на четвертого. Следовательно, остальные 15% приходятся на пятого из друзей. **Ответ:** 15%

6–задача

Найдите значение выражения:

$$\frac{505\cdot 1010\cdot 2020\cdot 4040+1010\cdot 2020\cdot 4040\cdot 8080+2020\cdot 4040\cdot 8080\cdot 16160+64}{1010\cdot 2020\cdot 4040\cdot 8080+2020\cdot 4040\cdot 8080\cdot 16160+4040\cdot 8080\cdot 16160\cdot 32320+1024}$$

Решение
Ответ получится, если преобразовать выражение:

$$\frac{1\cdot 2\cdot 4\cdot 8\cdot (2020^4+1010^4+505^4+1)}{2\cdot 4\cdot 8\cdot 16\cdot (2020^4+1010^4+505^4+1)}=\frac{1\cdot 2\cdot 4\cdot 8}{2\cdot 4\cdot 8\cdot 16}=\frac{1}{16}$$

Ответ: $\frac{1}{16}$.

7–задача

Разность удвоенного знаменателя и числителя дроби равна 153. После сокращения этой дроби получили 5/7. Найти сумму удвоенного числителя и знаменателя исходной дроби.

Решение Обозначив числитель через $5x$, получим уравнение $2\cdot 7x - 5x = 153$. Отсюда, $x = 17$. Таким образом, исходная дробь равна $85/119$. Следовательно, $85\cdot 2+119 = 289$.

Ответ: 289.

8–задача

Известно, что в году T было 53 пятницы. Каким днем недели было третье января этого года?

Решение В обычном году 365 дней. Так как $365 = 52\cdot 7 + 1$, в обычные годы 53 раза бывает только день недели, которым начинается год. Поэтому 1 января года Т было пятницей, и как следствие, 3–го января было воскресеньем. Но этого дня в ответах нет.

Возможен и другой ответ. Если год Т был високосным, он содержал 366 дней. В этом случае, год мог начинаться с четверга или пятницы. Соответственно, в этом случае 3–го января было субботой или воскресеньем. Так как варианта воскресенье в ответах нет, значит выбираем ответ: суббота.

Ответ: суббота.

9–задача

В трех мешках лежали груши, по 78 штук в каждом. Из первого мешка взяли несколько груш, из второго в два раза больше, а из третьего взяли столько, сколько осталось в первом и втором мешках вместе. Сколько груш осталось в трех мешках вместе?

Решение В третьем мешке осталось: $78-[(78-x)+ (78-2x)] = =3x-78$ груш. Соответственно, в трех мешках: $(78-x) + (7\,8-2x) + (3x-78) = 78$ груш. **Ответ**: 78.

10–задача

Длины всех сторон треугольника выражаются целым числом метров, а периметр равен 13 м. Сколько разных треугольников такого вида существует?

Решение Принимая во внимание то, что сумма длин двух сторон треугольника всегда больше длины третьей, а разность длин двух сторон треугольника всегда меньше длины третьей, получим 5 треугольников со сторонами:

6 + 4 + 3 = 13; 6 + 6 + 1 = 13; 5 + 6 + 2 = 13;
5 + 5 + 3 = 13; 5 + 4 + 4 = 13.

Ответ: 5 треугольников.

8 КЛАСС

1–задача

Сколькими разными способами можно выстроить в ряд все буквы слова БИШКЕК?

Решение

Если бы все 6 букв были бы различны, то количество таких букв было бы $6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1 = 720$. Но, так как в слове БИШКЕК две буквы «К», то разделим количество вариантов на 2 и получим 360. **Ответ:** 360.

2–задача

В чемпионате Зулумбии по футболу участвовали 12 команд, причем каждая команда сыграла с каждой из команд по 2 раза. Сколько игр было сыграно?

Решение

Каждая команда сыграла по две игры с каждым из соперников. Таким образом первая команда сыграла $2\cdot11$ матчей, вторая — $2\cdot10$ матчей (т.к. матчи с первой командой уже учтены) и т.д. . Таким образом, всего было сыграно:

$22 + 20 + 18 + \ldots + 2 = 2(1 + 2 + \ldots + 11) = 132$ матча.

Ответ: 132 матча.

3–задача

Сколько натуральных решений у уравнения $x^2 - y^2 = 125$?

Решение Так как левую часть уравнения можно записать в виде: $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$, а число 125 в виде: $125 = 1\cdot125 = 5\cdot25$, для уравнения $x^2 - y^2 = 125$, в силу условия натуральности решения, имеется только два возможных варианта представления в виде системы: $\begin{cases} x - y = 1, \\ x + y = 125 \end{cases}$ и $\begin{cases} x - y = 5, \\ x + y = 25 \end{cases}$. Так как каждая из этих систем имеет только одно решение: $\begin{cases} x_1 = 63, \\ y_1 = 62 \end{cases}$; $\begin{cases} x_2 = 15, \\ y_2 = 10 \end{cases}$, исходное уравнение имеет только два натуральных решения. **Ответ:** 2 решения.

4–задача

Бизнесмены решили создать автопарк. Первый бизнесмен для автопарка отдал 70 одинаковых автомобилей, второй — 40 таких же автомобилей, а третий внес 44 миллиона сомов. Сколько денег из этих 44 миллионов полагается первому бизнесмену, для того чтобы вклад в общее дело каждого из трех бизнесменов одинаков?

Решение Так как вклад каждого одинаков, третья часть каждого из 110 автомобилей принадлежит одному бизнесмену. То есть, третий бизнесмен за каждую такую часть заплатил: *(44 миллиона сомов)/110 = 0,4 миллиона сомов*. Первый бизнесмен внес $70 \cdot 3 = 210$ частей, и поэтому, должен получить деньги за: $210 - 110 = 100$ частей. Итак, получаем: $100 \cdot 0{,}4 = 40$ миллионов сомов.

Ответ: 40 млн. сом.

5–задача

Найдите произведение всех значений a, при которых сумма квадратов корней уравнения $x^2 - 3ax + a^2 = 0$ равна $0{,}28$.

Решение По теореме Виета: $x_1 \cdot x_2 = a^2;\ x_1 + x_2 = 3a$.

Поэтому, $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2 = (3a)^2 - 2a^2 = 7a^2$.

Следовательно, $7a^2 = 0{,}28$. Корни этого уравнения: $-0{,}2$ и $0{,}2$, а их произведение: $-0{,}2 \cdot 0{,}2 = -0{,}04$. **Ответ:** $-0{,}04$

6–задача

Распределите в порядке возрастания дроби: $A = \dfrac{10\,000\,000\,000}{10\,000\,000\,001}$;

$B=\dfrac{20\,000\,000\,001}{20\,000\,000\,003}$; $C=\dfrac{30\,000\,000\,001}{30\,000\,000\,004}$; $D=\dfrac{40\,000\,000\,001}{40\,000\,000\,005}$.

Решение Вычтем заданные числа из 1: $1-A=\dfrac{1}{10\,000\,000\,001}$;

$1-B=\dfrac{2}{20\,000\,000\,003}$; $1-C=\dfrac{3}{30\,000\,000\,004}$; $1-D=\dfrac{4}{40\,000\,000\,005}$.

Тогда, $\dfrac{1}{1-A}=10\,000\,000\,001$; $\dfrac{1}{1-B}=10\,000\,000\,001\dfrac{1}{2}$;

$\dfrac{1}{1-C}=10\,000\,000\,001\dfrac{1}{3}$; $\dfrac{1}{1-D}=10\,000\,000\,001\dfrac{1}{4}$. Поэтому,

$\dfrac{1}{1-A}<\dfrac{1}{1-D}<\dfrac{1}{1-C}<\dfrac{1}{1-B}$. Так как числа $1-A$, $1-B$, $1-C$, $1-D$ положительны, $1-A>1-D>1-C>1-B$.

Отсюда, $A<D<C<B$. **Ответ:** $A<D<C<B$.

7–задача

Найти значение выражения:

$$\frac{(11+9)(11^2+9^2)(11^4+9^4)(11^8+9^8)\dots(11^{1024}+9^{1024})(11^{2048}+9^{2048})+9^{4096}}{11^{4096}}$$

Решение Умножив числитель и знаменатель дроби на (11−9) и несколько раз применив формулу $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$, получим: $\dfrac{(11^{4096}-9^{4096})+9^{4096}}{(11-2)11^{4096}}=\dfrac{1}{2}$. **Ответ:** $\dfrac{1}{2}$

8–задача

Пройдя две трети пути от Токмака, поезд уменьшил скорость на 20% и прибыл на место на 24 минуты позже срока. Сколько часов поезд был в пути?

Решение Пусть через $2s$ обозначены две трети пути, тогда время на две трети пути: $2t=2s/v$. Поэтому, оставшуюся треть пути поезд вместо $s/v=t$ часов, прошел за: $s/0{,}8v=1{,}25t$. Следовательно, $0{,}25t=24$ *минуты*, или другими словами $0{,}25t=0{,}4$ *часа*. Отсюда, $t=1{,}6$ *часа*, а весь путь пройден за $3\cdot1{,}6$ *часа* плюс *24 минуты*, или то же самое в часах: *5,2 часа*. **Ответ**: 5,2 часа.

9–задача

Бригада швей планирует сшить определенное количество платьев. Если они будут шить по 33 платья в день, то им потребуется на 2 дня больше, чем планируется. Если же они будут шить по 42 платья в день, то им потребуется на 1 день меньше, чем планируется. Сколько платьев должна сшить бригада по плану?

Решение

Обозначив планируемое число дней через T, получим $33(T + 2) = 42(T - 1)$. Тогда, $9T = 108$. Итак, $T = 12$. Подставив найденное значение, в выражение $33(T + 2)$ получим ответ 462. Его можно проверить, вычислив значение выражения $42(T - 1)$ при $T = 12$. Итак, бригада планирует сшить 462 платья за 12 дней. **Ответ**: 462 платья.

10–задача

Нурбек рассказывает Тамаре: «Знаете ли, произошла удивительная история. Когда я выстроил своих солдатиков в две шеренги, остался один лишний. Когда я выстроил их в три шеренги, то остались два лишних солдатика, когда в четыре — три и так далее, когда я выстроил их в восемь шеренг, то остались семь лишних солдатиков». Определите, сколько солдатиков у Нурбека, если все они помещаются в трех коробках, каждая из которых вмещает 300 солдатиков.

Решение

Решение легко получить, заметив, что если добавить одного солдатика, то всех солдатиков можно выстроить в указанные шеренги. Другими словами, если к искомому числу добавить 1, то сумма будет делиться и на 2, и на 3, … и на 8. Так как наименьшее общее кратное для 1, 2, …, 8 равно $3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 8 = 840$, число солдатиков $840 - 1 = 839$. Понятно, что следующее число возможное солдатиков: $840 \cdot 2 - 1 = 1679$, не годится из–за вместимости коробок. **Ответ**: 839 солдатиков.

9 КЛАСС

1–задача

Сколько решений в натуральных числах имеет уравнение $XY - 20X - 20Y = 2020$?

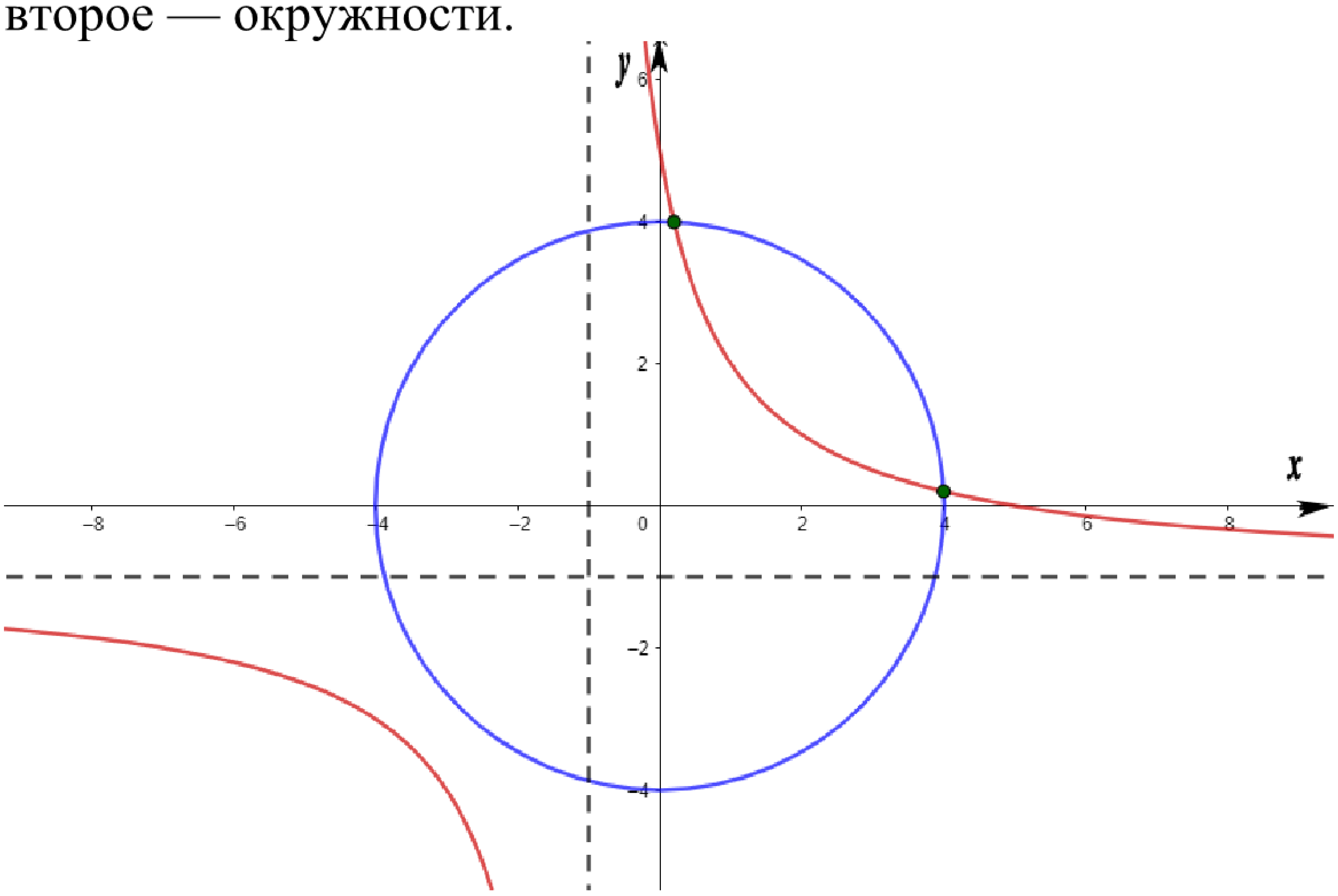
Решение Добавим по 400 в обе стороны уравнения: $XY - 20X - 20Y + 400 = 2420$ и разложим левую часть на множители: $(X - 20)(Y - 20) = 2420$. Если хотя бы одно из неизвестных будет меньше 20, то произведение $(X–20)(Y–20)$ отрицательно или одно из неизвестных отрицательно.
То есть, $X > 20,\ Y > 20$. Поэтому, к натуральным решениям приводят только разложения $2420 = 22\cdot 110 = 44\cdot 55 = 55\cdot 44 = 110\cdot 22$. **Ответ:** 4 натуральных решения.

2–задача

Сколько действительных решений имеет система:
$\begin{cases} x + xy + y = 5 \\ x^2 + y^2 = 16 \end{cases}$.

Решение $\begin{cases} x + xy + y = 5 \\ x^2 + y^2 = 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{5 - x}{1 + x} \\ x^2 + y^2 = 4^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -1 + \dfrac{6}{x + 1} \\ x^2 + y^2 = 4^2 \end{cases}$.

Первое уравнение системы является уравнением гиперболы, второе — окружности.



Так как графики имеют 2 точки пересечения, система имеет два решения. **Ответ:** 2.

3–задача

Пусть *a, b, c* будут сторонами треугольника *ABC*.

Каким должен быть этот треугольник, чтобы a^2, b^2, c^2 могли быть также сторонами другого треугольника?

Решение По теореме косинусов $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$. Так как сумма двух сторон треугольника всегда больше третьей, косинусы всех углов должны быть положительными. То есть, треугольник остроугольный. **Ответ:** остроугольным.

4–задача

Вычислите: $\left(4\cdot 10^{2020}-1\right):\left(4\cdot \underbrace{3...33}_{2020}+1\right)\cdot$

Решение

Упростим делимое: $4\cdot 10^{2020}-1=4\cdot \underbrace{10...00}_{2020}-1=\underbrace{39...99}_{2020}.$

Упростим делитель:

$4\cdot \underbrace{3...33}_{2020}+1=3\cdot \underbrace{3...33}_{2020}+\underbrace{3...33}_{2020}+1=\underbrace{10...00}_{2020}+\underbrace{3...33}_{2020}=\underbrace{13...33}_{2020}.$

Поэтому: $\left(4\cdot 10^{2020}-1\right):\left(4\cdot \underbrace{3...33}_{2020}+1\right)=\underbrace{39...99}_{2020}:\underbrace{13...33}_{2020}=3.$

Ответ: 3.

5–задача

Сколько восьмизначных чисел, делящихся на 5, можно составить путем перестановки цифр числа 37735372?

Решение Для того, чтобы число делилось на 5 без остатка последняя цифра должна быть 5 или 0. В исходном выражении из 8 цифр есть только одна цифра 5. Она должна быть последней. Перестановки остальных цифр дадут 7!.

С учетом повторов цифры 3 (3 раза) и цифры 7 (3 раза) получим: $7!:(3!3!) = 140$. **Ответ:** 140.

6–задача

Решить уравнение:

$$(x+3)^{2019}+(x+3)^{2018}\cdot(x-3)+(x+3)^{2017}\cdot(x-3)^2+...$$
$$+(x+3)\cdot(x-3)^{2018}+(x-3)^{2019}=0\cdot$$

Решение Воспользовавшись формулой

$$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+...+ab^{n-2}+b^{n-1}),$$

домножим обе части уравнения на $(x+3)-(x-3)$ и получим:

$(x+3)^{2020}-(x-3)^{2020}=0$. Отсюда, $|x+3|=|x-3|$. Корень этого уравнения $x=0$. **Ответ:** $x=0$.

7–задача

Пусть $a^2+ab+b^2+3bc+5c^2+8cd+13d^2+21d+22.05=0$.
Чему равно $(a+b+c+d)$?

Решение

Воспользовавшись формулой $(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$, уравнение $a^2+ab+b^2+3bc+5c^2+8cd+13d^2+21d+22.05=0$ можно записать в виде: $\left(a+\frac{b}{2}\right)^2+\frac{3}{4}(b+2c)^2+2(c+2d)^2+5(d+2.1)^2=0\cdot$

Так как сумма квадратов равна нулю только в случае, когда каждое слагаемое равно нулю, получим

$\begin{cases} a+b/2=0, \\ b+2c=0, \\ c+2d=0, \\ d+2,1=0. \end{cases}$ Поэтому, $\begin{cases} a=4,2, \\ b=-8,4, \\ c=4,2, \\ d=-2,1. \end{cases}$

Таким образом, $a+b+c+d=4,2-8,4+4,2-2,1=-2,1.$

Ответ: –2,1

8–задача

Число ***A*** является произведением трех последовательных целых чисел. Сумма трех частных, полученных от деления ***A*** на каждый его сомножитель равна 47. Найдите ***A*.**

Решение Произведение трех последовательных целых чисел можно записать в виде $(z-1)z(z+1)$. Поэтому, так как сумма частных равна 47, получается уравнение: $(z-1)z(z+1)=47.$
Раскроем скобки и приведем подобные члены:

$z^2-z+z^2-1+z^2+z=47 \Leftrightarrow 3z^2-1=47 \Leftrightarrow 3z^2=48 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z^2=16$. Итак, $z=-4$ и $z=4$.

В первом случае,
$A=(z-1)z(z+1)=(-4-1)(-4)(-4+1)=-60.$

Во втором случае, $A=(4-1)4(4+1)=60.$

Среди ответов есть только первый вариант –60. **Ответ:** –60.

9–задача

Найдите произведение двух натуральных чисел, зная их сумму 145 и общий делитель 29.

Решение Так как числа делятся нацело на 29, их можно записать в виде $a = 29m$ и $b = 29n$, где m и n натуральные числа. Тогда, $29m + 29n = 145$. Разделив уравнение на 29, получим $m + n = 5$. Итак, m и n могут составлять два различных сочетания: (1; 4), (2; 3). Соответственно, искомые числа, это пары чисел: (1·29 = 29; 4·29 = 116), (2·29 = 58; 3·29 = 87). Их произведения 29·116 = 3364, и 58·87 = 5046. Среди ответов есть только 3364. **Ответ:** *3364*.

10–задача

В 9 часов от пристани отошел теплоход и вернулся обратно в 15 часов 18 минут. Его скорость по течению реки составила 22 км/ч, против течения — 20 км/ч. Сколько всего километров проплыл теплоход?

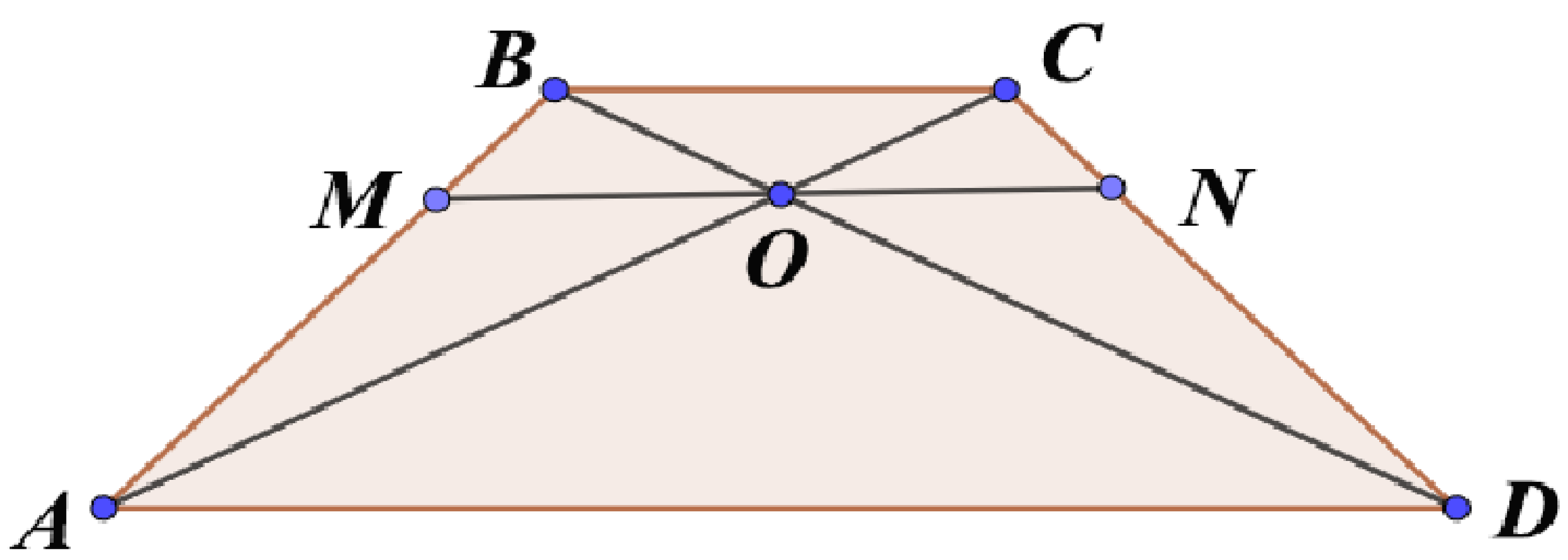
Решение Теплоход против течения проплыл столько же, сколько по течению. Поэтому, если t_1 это время, которое он плыл против течения, а t_2 — по течению, то $20t_1 = 22t_2$. Отсюда, $t_1 /t_2 = 22/20 = 11/10$. Итак, время, затраченное теплоходом на плавание, можно разделить на: $11 + 10 = 21$ частей, 11 из которых теплоход плыл против течения, 10 — по течению. Так как на плавание ушло: $15,3 – 9 = 6,3$ часов, теплоход плыл против $(6,3/21)11 = 3,3$ часа, проплыв: $20·3,3 = 66$ км. Следовательно, он всего проплыл: $66·2 = 132$ километра. Результат можно проверить, рассмотрев плавание по течению: $(6,3/21)10 = 3$ часа, и $22·3 = 66$ км.

Ответ: 132.

10 КЛАСС

1–задача

Известно, что основания трапеции равны 2 и 6 метрам. Найдите длину отрезка, который параллелен основаниям, соединяет боковые стороны трапеции и проходит через точку пересечения ее диагоналей.



Решение

Из подобия треугольников BDC и ODN получаем: $\frac{BC}{ON}=\frac{CD}{ND}=\frac{CN+ND}{ND} => \frac{2}{ON}=\frac{CN+ND}{ND}$ =>

$2ND = ON\cdot CN + ON\cdot ND$.

Из подобия треугольников ACD и OCN:

$\frac{6}{ON}=\frac{CD}{CN}=\frac{CN+ND}{CN} => 6CN = ON\cdot CN + ON\cdot ND$ =>

$6CN = ON\cdot CN + ON\cdot ND$. Поэтому,

$\frac{6}{ON}=\frac{CD}{CN}=\frac{4CN}{CN} => ON=\frac{6}{4}=1,5$

Рассуждая похожим образом, получим $MO = 1,5$.

Отсюда, $MN = MO + ON = 1,5 + 1,5 = 3$. **Ответ:** 3 м.

2–задача

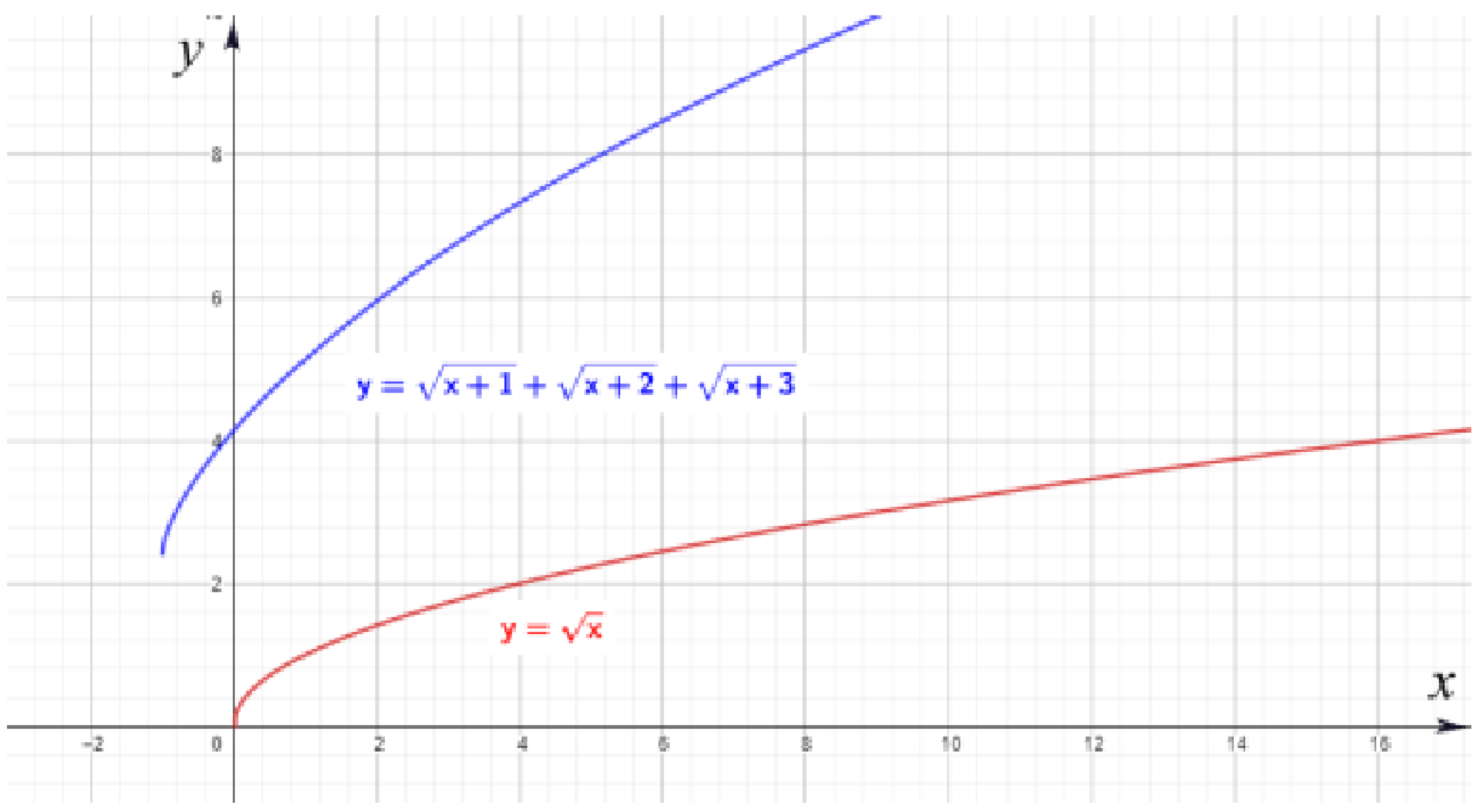
Найдите последние 3 цифры числа $(1!)^3+(2!)^3+(3!)^3+\ldots+(2020!)^3$.

Решение Все факториалы большие, чем 4! (5!, 6! и т.д) оканчиваются на ноль, так как содержат в виде множителей 2 и 5. Поэтому, третья степень таких факториалов будет иметь 000 на последних местах. То есть, последние 3 цифры исходного числа являются последними тремя цифрами числа $(1!)^3+(2!)^3+(3!)^3+(4!)^3$. Так как $(1!)^3+(2!)^3+(3!)^3+(4!)^3 =$ $=1^3+2^3+6^3+24^3= 14049$, последние три цифры: 0, 4, 9. **Ответ:** 0, 4, 9.

3–задача

Сколько корней у уравнения $\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}+\sqrt{x+3}=\sqrt{x}$?

Решение



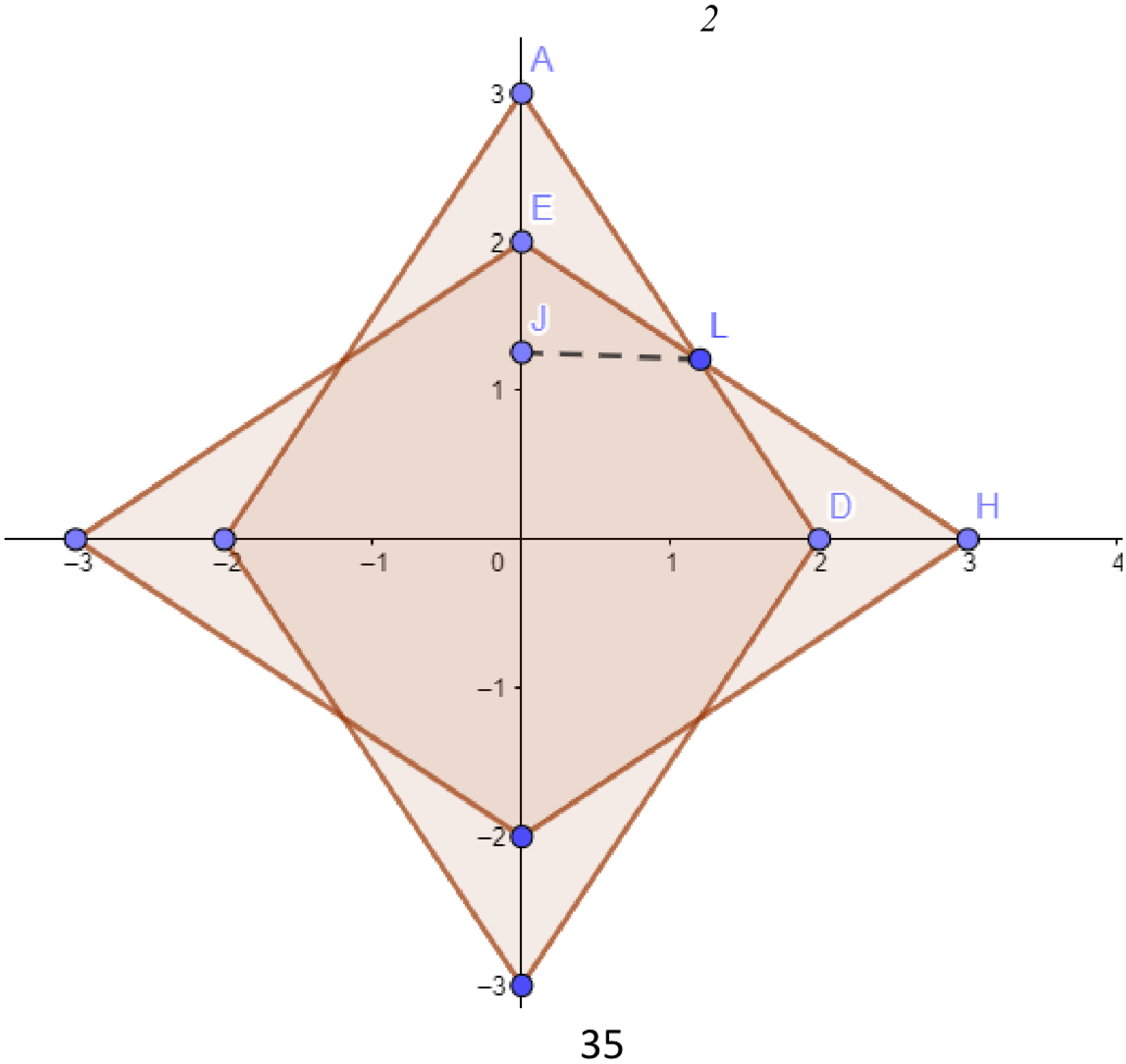
Так как функция $y = \sqrt{x}$ является возрастающей, при любых значениях x правая часть уравнения меньше левой. То есть уравнение не имеет корней.

Ответ: 0.

4–задача

Диагонали первого ромба равны 4 и 6. Второй ромб получается поворотом первого на 90° относительно его центра. Найдите площадь пересечения этих ромбов.

Решение Площадь каждого из ромбов равна половине произведения его диагоналей, т.е. $\frac{4 \cdot 6}{2} = 12$.



Уравнение прямой AD: $3x + 2y = 6$; прямой EH: $2x + 3y = 6$.

Поэтому, решив систему $\begin{cases} 3x + 2y = 6 \\ 2x + 3y = 6 \end{cases}$, получим координаты точки L (1,2;1,2). Тогда, площадь треугольника $S_{AEL} = \dfrac{1}{2} AE \cdot LJ = \dfrac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1{,}2 = 0{,}6.$ Следовательно, из рисунка, искомая площадь равна: $S = 12 - 0{,}6 \cdot 4 = 9{,}6.$

Ответ: 9,6.

5–задача

Решите неравенство $\sqrt{x^2 - 1} \le \sqrt{5x^2 - 1 - 4x - x^3}$.

Решение Исходное неравенство эквивалентно системе $\begin{cases} x^2 - 1 \ge 0; \\ x^2 - 1 \le 5x^2 - 1 - 4x - x^3 \end{cases}$. Поэтому, $\begin{cases} x^2 - 1 \ge 0; \\ x^3 - 4x^2 + 4x \le 0; \end{cases}$ <=>

$$\begin{cases} (x+1)(x-1) \ge 0; \\ x(x^2 - 4x + 4) \le 0; \end{cases} <=> \begin{cases} x \in (-\infty; -1] \cup x \in [1; +\infty); \\ x \in (-\infty; 0] \cup \{2\}. \end{cases}$$

Ответ: $x \in (-\infty; -1] \cup \{2\}$.

6–задача

Известно, что $f(x) = x^3 + 6x^2 + 12x + 6$.

Решите уравнение $f(f(f(f(x)))) = 7$.

Решение

Преобразуем функцию f и ее композиции:

$$f(x) = x^3 + 6x^2 + 12x + 6 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8 - 2 = (x+2)^3 - 2;$$

$$f(f(x)) = ((x+2)^3 - 2 + 2)^3 - 2 = (x+2)^9 - 2;$$

$$f(f(f(x))) = ((x+2)^9 - 2 + 2)^3 - 2 = (x+2)^{27} - 2;$$

$$f(f(f(f(x)))) = ((x+2)^{27} - 2 + 2)^3 - 2 = (x+2)^{81} - 2.$$

Поэтому,

$$f(f(f(f(x)))) = 7 <=> (x+2)^{81} - 2 = 7 <=> (x+2)^{81} = 9 <=> x + 2 = \sqrt[81]{9}$$

Ответ: $x = \sqrt[81]{9} - 2$.

7–задача

Найдите сотый член последовательность чисел: 10, 15, 25, 40, 60, 85, … .

Решение Обозначим члены последовательности через a_n . Тогда, $a_1 = 10$; $a_2 = 10 + 5 = a_1 + 5(2 - 1);$
$a_3 = 15 + 10 = a_2 + 5(3 - 1);$ $a_4 = 25 + 15 = a_3 + 5(4 - 1);$ … .
То есть, $a_2 = 10 + 5(2 - 1);$ $a_3 = 10 + 5(2 - 1) + 5(3 - 1);$
$a_4 = 10 + 5(2 - 1) + 5(3 - 1) + 5(4 - 1);$ … .
Таким образом, $a_n = 10 + 5(2-1) + 5(3-1) + 5(4 - 1) + \ldots + 5(n - 1).$
Формула для суммы членов арифметической прогрессии позволяет записать $a_n = 10 + 5 \cdot \frac{1 + (n-1)}{2} \cdot (n-1) \cdot$

Поэтому, $a_{100} = 10 + 5 \cdot \frac{100}{2} \cdot (100 - 1) = 24760.$ **Ответ:** 24760.

8–задача

Три числа являются членами арифметической прогрессии, три числа — членами геометрической прогрессии. Складывая соответствующие члены этих прогрессий, получим 10,5; 16; −26,5. Зная, что сумма членов арифметической прогрессии равна 21, найдите произведение членов геометрической прогрессии.

Решение Обозначив члены арифметической прогрессии $a - d;$ $a;$ $a + d,$ получим, что $S = 3a$. Поэтому, $a = 21/3 = 7$. Обозначив члены геометрической прогрессии $b/q;$ $b;$ $bq,$ получим, что: во−первых, $b = 16 - 7 = 9;$ во−вторых, произведение членов геометрической прогрессии равно
$b^3 = 729.$ **Ответ:** 729.

9–задача

Найдите $(a - b - c - d)$, зная, что: $\begin{cases} a + 7b + 3c + 5d = 40, \\ 8a + 4b + 6c + 2d = -40, \\ 2a + 6b + 4c + 8d = 40, \\ 5a + 3b + 7c + d = -40. \end{cases}$

Решение Эту систему можно решить одним из традиционных способов, но этот путь является долгим и скучным. В то же время, обратив внимание на особенности в распределении коэффициентов, получим простое решение. Коэффициенты 1−го и 4−го уравнений «взаимно обратны». То же самое можно сказать о 2−м и 3−м уравнениях. Поэтому, сложив 1−й с 4−м и 2−й с 3−м, получим: $\begin{cases} 6a+10b+10c+6d=0, \\ 10a+10b+10c+10d=0. \end{cases}$ Вычитая первое уравнение полученной системы из второго, получим $a + d = 0$, и как следствие, $b + c = 0$. Тогда, $a = -d,\ b = -c$. Подставив найденные значения в первое и второе уравнения исходной системы, получим:

$$\begin{cases} -d+7(-c)+3c+5d=40, \\ 8(-d)+4(-c)+6c+2d=-40, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4c+4d=40, \\ 2c-6d=-40, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -c+d=10, \\ c-3d=-20, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=-5, \\ d=5. \end{cases}$$ Отсюда, $a = -d = -5;\ b = -c = 5.$

Тогда, $a - b - c - d = -10.$ **Ответ:** –10.

10–задача

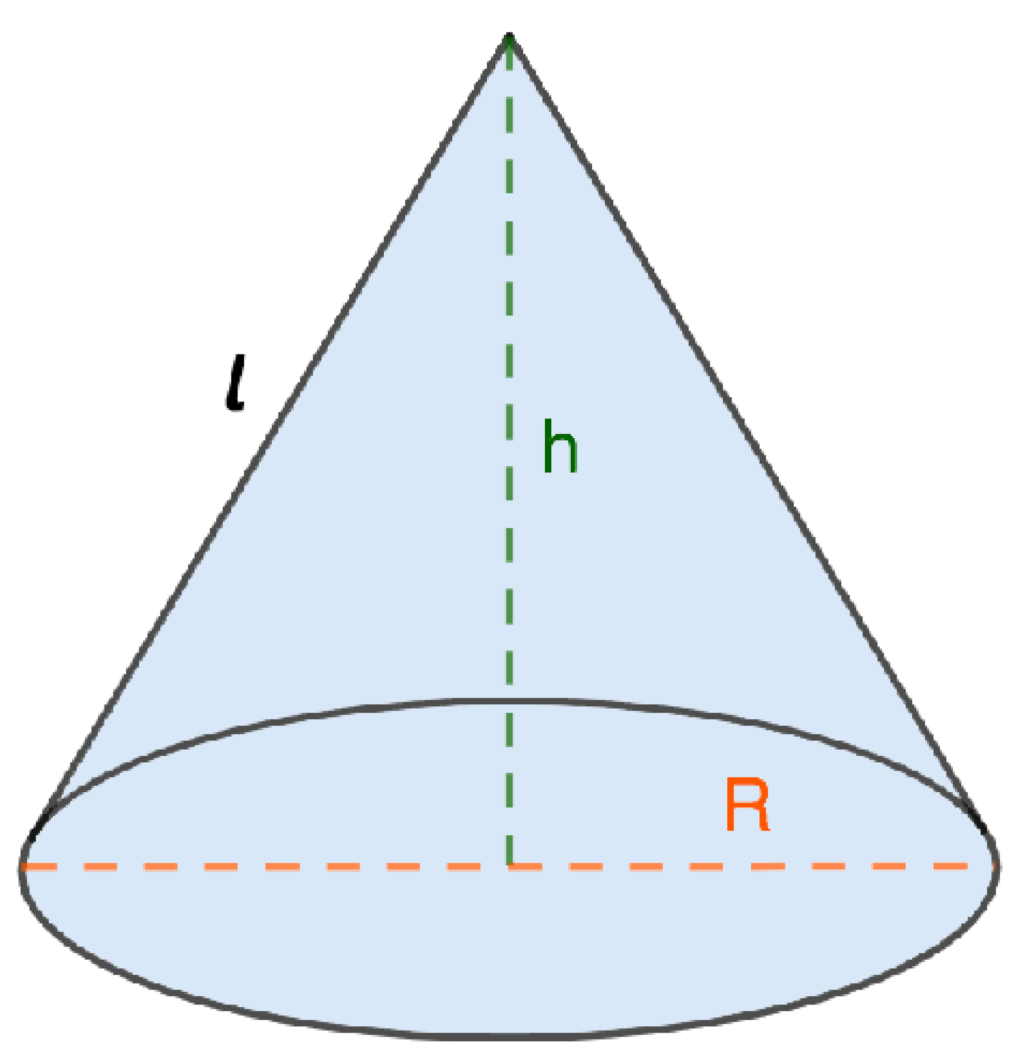
В магазине было 6 бочек напитка максым. Емкости бочек разные: 15 л, 16 л, 17 л, 18 л, 19 л и 31 л. Эсен купил ровно в 1,5 раза больше максыма, чем Бегимай. Продавец был рад, что не пришлось раскупоривать бочки и осталась одна целая бочка. Сколько литров максыма в оставшейся бочке?

Решение Всего имелось 116 литров максыма. Если убрать содержимое одной бочки, то должно получиться число, делящееся на 2,5. Это числа 16 и 31. Но 31 в ответах не значится. **Ответ:** 16.

11 КЛАСС

1–задача

Найдите площадь боковой поверхности конуса, если известно, что его осевое сечение является правильным треугольником со стороной 6 м.



Решение Площадь боковой поверхности конуса: $S = \pi R l$. Так как осевое сечение является правильным треугольником со стороной 6 метров, то $R = 3;\ l = 6$. **Ответ:** 18π м^2.

2–задача

Для скольких натуральных чисел n выражение $n!+5$ является квадратом натурального числа?

Решение Покажем, что для $n < 10$ выражение $n! + 5$ не является квадратом натурального числа:

n	$n!$	$n! + 5$	$\sqrt{n!+5} \approx$
1	1	6	2,45
2	2	7	2,646
3	6	11	3,32
4	24	29	5,4
5	120	125	11,18
6	720	725	3,344
7	5040	5045	71,03
8	40320	40325	200,81
9	362880	362885	602,4

Далее, для $n = 10$: $n! + 5 = 10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1 + 5 = 5(k + 1)$. Так как число k заканчивается на ноль, $k + 1$ заканчивается на 1 и не делится на 5. Поэтому $n! + 5$ не содержит множитель 5^2 и , следовательно, не может быть квадратом натурального числа. Понятно, что равенство

$n! + 5 = n\cdot(n–1)\cdot\ldots10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1 + 5 = 5(k + 1)$ имеет место для любого $n \geq 10$. Отсюда, можно сделать заключение: натуральных чисел, удовлетворяющих условию задачи, нет.

Ответ: 0.

3–задача

Ширину и длину параллелепипеда увеличили на 1 см, а высоту уменьшили на 9 см. Несмотря на эти изменения, новый параллелепипед имеет тот же объем что исходный. Каков объем параллелепипеда, если ширина и длина параллелепипеда равны, а высота нового параллелепипеда в 4 раза больше ширины исходного параллелепипеда?

Решение Пусть l – длина, w – ширина, а h – высота исходного параллелепипеда. По условию задачи объемы параллелепипедов одинаковы: $V = w\cdot l\cdot h = (w+1)(l+1)(h - 9)$. Известно, что $l = w$ и $h = 4w + 9$. Поэтому,

$w\cdot w\cdot(4w + 9) = (w + 1)(w + 1)(4w);\ \ w \neq 0 =>$

$w\cdot(4w + 9) = (w+1)(w+1)4 => 4w^2 + 9w = 4(w^2 + 2w + 1) =>$

$4w^2 + 9w = 4w^2 + 8w + 4 \Rightarrow w = 4;\ l = w = 4;$
$h = 4w + 9 = 4(4) + 9 = 25.$
Начальный объем = $w \cdot l \cdot h = (4)(4)(25) = 400.$
Новый объем = $(w + 1)(l + 1)(h - 9) = (5)(5)(16) = 400.$
Ответ: 400.

4–задача

Если n – натуральное число, то на какую цифру оканчивается число $24^{5 + 2n} \cdot 36^6 \cdot 17^3$?

Решение

Последняя цифра числа $24^{5 + 2n}$ равна 4, потому что любое натуральное число ($10N + 4$) в нечетной степени имеет последнюю цифру 4. ($4^1 = 4;\ 4^2 = 16;\ 4^3 = 64;\ 4^4 = 256; \ldots$).
Последняя цифра числа 36^6 равна 6, потому что любое натуральное число ($10N + 6$) в любой степени имеет последнюю цифру 6. ($6^1 = 6;\ 6^2 = 36;\ 6^3 = 216;\ 6^4 = 1296; \ldots$).
Последняя цифра числа 17^3 равна 3, потому что
$17^3 = (10 + 7)^3 = 10K + 7^3.$
Таким образом, так как $4 \cdot 6 \cdot 3 = 72$, последняя цифра исходного числа равна 2. **Ответ:** 2.

5–задача

Решите в простых числах уравнение $a = b^c + 1$. В ответе укажите значение выражения $abc(a + b + c)$.

Решение Для любых простых чисел b и c выполняется неравенство $b^c \geq 4,$ потому что 2 – наименьшее простое число. Следовательно, $a \geq 5$. Так как все простые числа, за исключением 2 нечетные, a — нечетное число. Поэтому, $b^c = a - 1$, четное, и $b = 2$. Если $c = 2$, то $a = 5$, и $a = 5;\ b = 2;\ c = 2$ — решение данного уравнения. Если $c > 2,$ то c нечетное простое число, и сумму $1 + 2^c$ можно разложить на множители, отличные от единицы и самого числа:
$1 + 2^c = 1 + 2^{2p + 1} = (1 + 2)(1 - 2 + 2^2 - 2^3 + \ldots + 2^{2p}).$
То есть, при $c > 2$ число $a = b^c + 1$ не будет простым числом.
Итак, $a = 5;\ b = 2;\ c = 2$ – единственное решение уравнения $a = b^c + 1$ в простых числах. Поэтому, $5 \cdot 2 \cdot 2(5 + 2 + 2) = 180.$
Ответ: 180.

6–задача

Решите неравенство: $\left|\dfrac{5x^3+35x^2-x-1}{x+7}\right| = \left|5x^2-1\right| + \left|\dfrac{6}{x+7}\right|$.

Решение Заметим, что: $\dfrac{5x^3+35x^2-x-1}{x+7} = 5x^2-1+\dfrac{6}{x+7}$.

Зная, что $|a+b| \le |a|+|b|$ получим, что данное неравенство выполняется при всех значениях *x,* при которых входящие в него выражения имеют смысл. Значит, $(-\infty;-7)\cup(-7;+\infty)$.

Ответ: $(-\infty;-7)\cup(-7;+\infty)$.

7–задача

Три числа являются членами арифметической, другие три — членами геометрической прогрессии. Складывая соответствующие члены этих прогрессий, получим 1, 11, 24. Зная, что произведение членов геометрической прогрессии равно 216, найдите произведение членов арифметической.

Решение Обозначив члены геометрической прогрессии: b/q; b; bq, получим, что $b^3 = 216$. Отсюда, $b = 6$. Соответственно, обозначив члены арифметической прогрессии $a-d$; a; $a+d$, получим, что $a = 11 - b = 11 - 6 = 5$.

Две оставшиеся суммы задают систему уравнений:

$$\begin{cases} 5-d+6/q=1; \\ 5+d+6q=24; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d=4+6/q; \\ d=19-6q; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 19-6q=4+6/q; \\ d=19-6q; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6q^2-15q+6=0; \\ d=19-6q. \end{cases}$$

Корни полученного квадратного уравнения 2 и $1/2$.

В первом случае, члены геометрической прогрессии:

$b/q = 6/2 = 3$; $b = 30$; $bq = 6\cdot 2 = 12$. При этом,

$d = 19 - 6q = 19 - 12 = 7$ и, соответственно, члены арифметической прогрессии:

$a - d = 5 - 7 = -2$; $a = 5$; $a + d = 5 + 7 = 12$.

А их произведение $(a-d)a(a+d) = (-2)5\cdot 12 = -120$.

Во втором случае, члены геометрической прогрессии:

$b/q = 6/(1/2) = 12$; $b = 6$; $bq = 6(1/2) = 3$. При этом, $d = 19 - 6q = 19 - 3 = 16$ и, соответственно,

$a - d = 5 - 16 = -11;$ $a = 5;$ $a+d = 21.$ А их произведение $(a-d)a(a+d)=(-11)5\cdot 21= -1155$ — такого варианта в ответах нет. **Ответ:** –120.

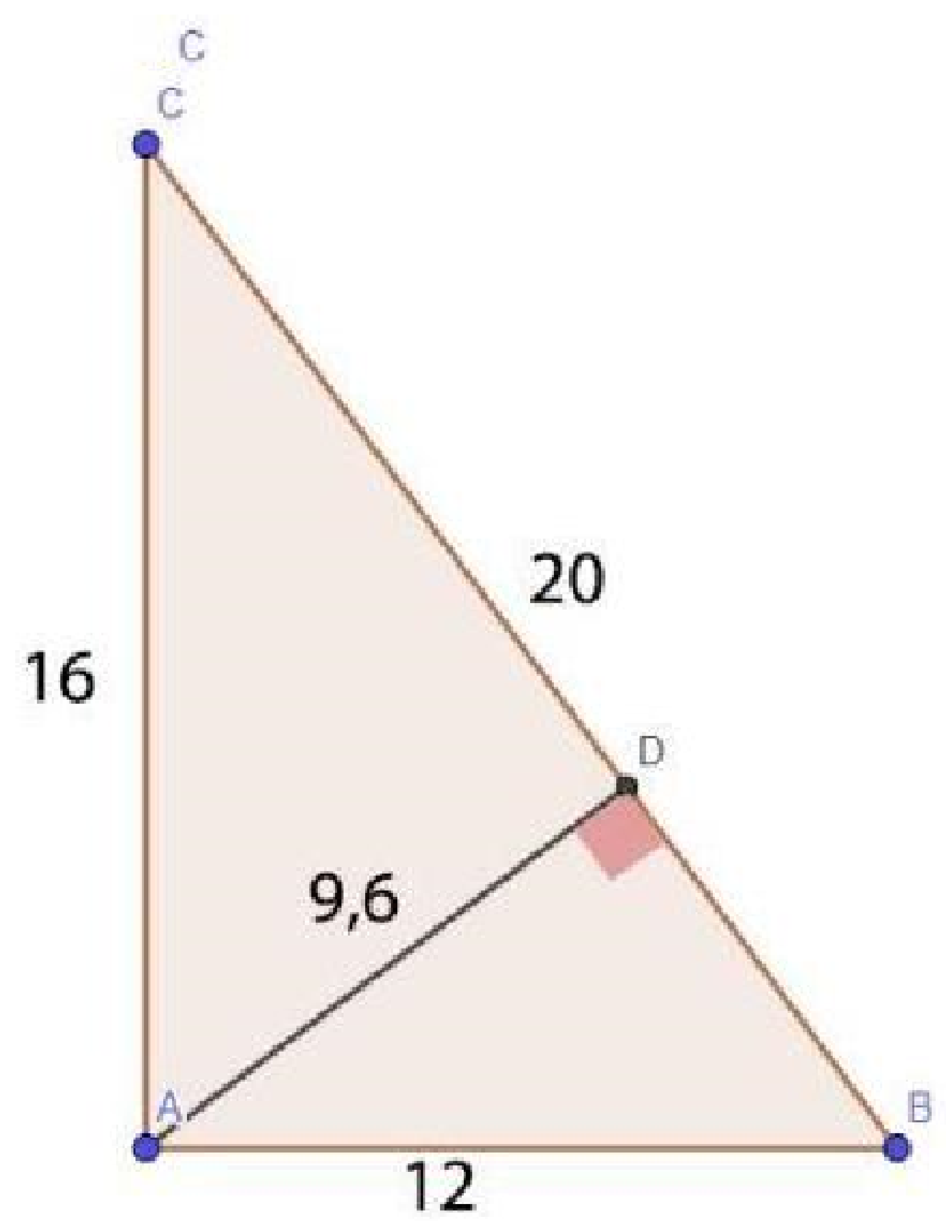
8–задача

Айдар купил круглый арбуз диаметром 32 см, толщина корки которого составила 2 см. Сколько процентов стоимости этого арбуза истрачено на корку?

Решение Будет разумно предположить, что арбуз имеет форму шара. Так как объем шара равен $4\pi R^3/3$, где R радиус шара, объем арбуза: $4\pi(16)^3/3,$ а его мякоти: $4\pi(14)^3/3.$ Таким образом, мякоть составляет: $[4\pi(14)^3/3] / [4\pi(16)^3/3] \approx 0,67 = 67\%$ от объема всего арбуза. Соответственно, примерно 33% пришлось на корку. **Ответ:** 33%.

9–задача

Найдите периметр треугольника, у которого сумма катетов больше гипотенузы на 8 сантиметров, а высота, опущенная на гипотенузу, равна 9,6 см.



Решение Нетрудно показать, что высота, опущенная на гипотенузу делит треугольник на треугольники, подобные исходному. *(Углы полученных треугольников равны углам исходного.)*

Поэтому, обозначив катеты исходного треугольника через a и $b,$ а гипотенузу через c, условия задачи можно записать в виде системы уравнений:

$$\begin{cases} a^2+b^2=c^2; \\ a+b-c=8; \\ \dfrac{a}{9,6}=\dfrac{c}{b} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+b)^2-2ab=c^2; \\ a+b=c+8; \\ ab=9,6c; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (8+c)^2-2\cdot 9,6c=c^2; \\ a+b=c+8; \\ ab=9,6c. \end{cases}$$

Решив полученное уравнение, относительно c, получим $c=20$.

Тогда, длины сторон можно найти, решив систему уравнений:

$$\begin{cases} a+b=c+8; \\ ab=9{,}6c; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=28; \\ ab=192. \end{cases}$$

Но, данных для нахождения периметра уже достаточно:

$(a+b)+c=28+20=$ 48 см. **Ответ:** 48.

10–задача

Найти разность длин сторон прямоугольника с периметром 28 см, площадь которого равна ($48+\log_{783}850$) см^2.

Решение Среди прямоугольников одинакового периметра максимальную площадь имеет квадрат. Периметр 28 имеет квадрат со стороной 7. Его площадь 49, меньше числа $48+\log_{783}850$. То есть такой прямоугольник не существует.

Ответ: задача не имеет решения.

2020–2021 ВТОРОЙ ТУР. РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

9 КЛАСС

1–задача. Найдите сумму всех элементов таблицы:

3	0,5	– 2	– 4,5	– 7	– 9,5	– 12	–14,5	– 17
– 17	– 14	– 11	– 8	– 5	– 2	1	4	7
–11,8	– 9,6	– 7,4	– 5,2	– 3	– 0,8	1,4	3,6	5,8
23	17	11	5	– 1	– 7	– 13	– 19	– 25
– 1,8	– 1,1	– 0,4	0,3	1	1,7	2,4	3,1	3,8
25	19,5	14	3	8,5	– 2,5	– 8	– 13,5	– 19
– 8,2	– 4,9	– 1,6	1,7	11,6	5	8,3	14,9	18,2
– 4	7	– 37	– 26	– 15	18	29	40	51
0	2,25	4,5	6,75	18	9	11,25	13,5	15,75

Решение Конечно, можно просто просуммировать все числа. Чуть быстрее получится, если заметить, что в первых строчках таблицы стоят члены арифметической прогрессии. Так как сумма членов арифметической прогрессии равна произведению медианы (значение среднего члена) на число членов прогрессии, сумма чисел в первой строке (–7)·9, во второй: (–5)·9,…, в пятой: 1·9. Числа в оставшихся строках, конечно, можно просто просуммировать. Но, то, как легко все получилось ранее, заманчиво. Поэтому, нужно заметить, что и в остальных строках получатся последовательные члены арифметической прогрессии, если поменять местами несколько чисел.

3	*0,5*	*– 2*	*– 4,5*	*– 7*	*– 9,5*	*– 12*	*-14,5*	*– 17*
– 17	*– 14*	*– 11*	*– 8*	*– 5*	*– 2*	*1*	*4*	*7*
–11,8	*– 9,6*	*–7,4*	*– 5,2*	*– 3*	*– 0,8*	*1,4*	*3,6*	*5,8*
23	*17*	*11*	*5*	*– 1*	*– 7*	*– 13*	*– 19*	*– 25*
– 1,8	*– 1,1*	*–0,4*	*0,3*	*1*	*1,7*	*2,4*	*3,1*	*3,8*
25	*19,5*	*14*	*8,5*	*3*	*– 2,5*	*– 8*	*– 13,5*	*– 19*
– 8,2	*– 4,9*	*–1,6*	*1,7*	*5*	*8,3*	*11,6*	*14,9*	*18,2*
– 37	*– 26*	*–15*	*–4*	*7*	*18*	*29*	*40*	*51*
0	*2,25*	*4,5*	*6,75*	*9*	*11,25*	*13,5*	*15,75*	*18*

В итоге, получаем, что искомая сумма:
$(-7)\cdot 9 + (-5)\cdot 9 + (-3)\cdot 9 + (-1)\cdot 9 + 1\cdot 9 + 3\cdot 9 + 5\cdot 9 + 7\cdot 9 + 9\cdot 9$.
Вынесем 9 за скобки и получаем дополнительный бонус — еще одну арифметическую прогрессию:
$[(-7) + (-5) + (-3) + (-1) + 1 + 3 + 5 + 7 + 9]\cdot 9$. Медианой для этой прогрессии является число 1. Поэтому, искомая сумма: $[1\cdot 9]\cdot 9 = 81$. **Ответ:** 81

2–задача

На классной доске написаны числа 1; 2; 3; … 2021; 2022. Разрешается стереть два любых числа и записать вместо них их сумму или разность. Понятно, что после многократного повторения этой операции на доске останется одно число. Докажите, что это число не может быть нулем.

Решение Сумма или разность целых чисел с одинаковой четностью число четное, а четного и нечетного — нечетное. В итоге, после каждой операции число нечетных чисел или не изменится, или уменьшится на 2. Так как изначально нечетных чисел нечетное количество, итоговое число всегда будет нечетным!

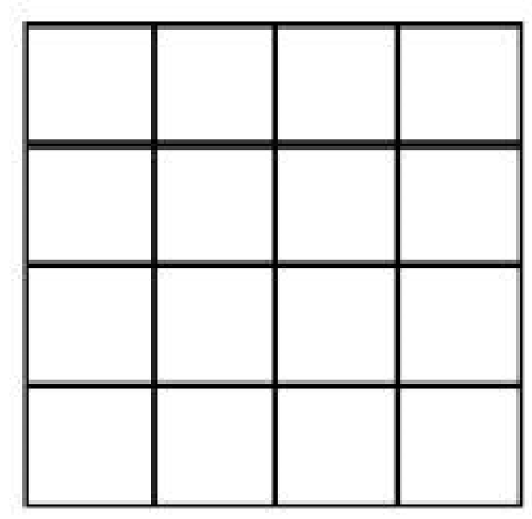
Ответ: Итоговое число нечетное, а ноль — четное.

3–задача. Маша везет на медведе 17 пирожков: с мясом, с рисом, с картошкой. При этом пирожков с рисом в два раза больше, чем с мясом. Сколько пирожков с картошкой у Маши, если их больше, чем пирожков с мясом, и меньше, чем пирожков с рисом?

Решение Первые два условия дают два уравнения: $м + р + к = 17$; $р = 2м$. Отсюда, $3м + к = 17$. Так как количества пирожков являются натуральными числами, число $м$ может принимать значения от 1 до 5. Последовательно вычисляя соответствующие количества пирожков с картошкой, можно убедится в том, что только в случае $к = 5$ выполняются неравенства $к > м$ и $к < р$.

Ответ: 5

4–задача. Сеть дорог состоит из 40 отрезков по 1 километру, как показано на рисунке. Какова наименьшая длина непрерывного маршрута, содержащего все отрезки?



Решение Используем буквы A, B, C, D, E и цифры 1, 2, 3, 4, 5 для того чтобы пронумеровать узлы сетки, так чтобы левый нижний узел имел номер A1, узел справа от него A2 и так далее. Правый верхний узел получит номер E5. Теперь договоримся о том, что стрелка будет соединять начало и конец прямолинейного движения от узла к узлу. Тогда, двигаясь по маршруту A2 →A5 → E5 → E1 → A1 → A2 → E2 → E3→ A3→ A4→ E4→ E5→ D5→ D1→ C1→ C5→ B5→ B1 мы пройдем по всем отрезкам по маршруту длиной 46 км. **Ответ**: 46 км.

5–задача. Даны положительные целые числа a, b, c, d. Найдите наибольшее значение bd, если $ab + cd = 2020$.

Решение Произведение fg, при условии $f + g = r$, принимает наибольшее значение, если $f = g = r/2$ — на геометрическом языке, среди прямоугольников с одинаковым периметром наибольшую площадь имеет квадрат. Поэтому, $abcd$ принимает наибольшее значение $(1010)^2$, если $ab = cd = 1010$. В свою очередь, bd принимает наибольшее значение, при условии $abcd = (1010)^2$, если $a = c = 1$. Следовательно, ответ: $(1010)^2 = 1020100$. **Ответ**: 1020100.

6–задача

График квадратичной функции $f(x) = x^2 + 2px - p^2 + 7p - 2020$ пересекает координатные оси в трех точках: A, B и C. Определите, при каком значении p произведение длин отрезков OA, OB и OC будет наименьшим. (O — начало системы координат.)

Решение Так как свободный член функции $f(x)$ — трехчлен $f(0) = -p^2 + 7p - 2020 < 0$ при всех значениях p, график функции $f(x)$ пересекает ось абсцисс в двух точках $x_1 < 0 < x_2$. Следовательно, $OA = -x_1$; $OB = x_2$; $OC = -f(0)$. Тогда

$OA \cdot OB \cdot OC = -x_1x_2 - (-f(0)) = \left(p^2 - 7p + 2020\right)^2$, так как

$x_1 \cdot x_2 = -p^2 + 7p - 2020$ — по теореме Виета.

Найдем наименьшее значение квадратного трехчлена $p^2 - 7p + 2020 > 0$. Для этого выделим полный квадрат: $p^2 - 7p + 2020 = (p - 3{,}5)^2 + 2007{,}75$. Таким образом, квадратный трехчлен и, соответственно, произведение длин отрезков OA, OB и OC, достигает своего наименьшего значения при $p = 3{,}5$. **Ответ:** $p = 3{,}5$.

7–задача

Найдите все целые x и y так, чтобы $(xy + 5)^2 = x^2 + y^2$.

Решение Вычтем $2xy$ из обеих частей уравнения и получим: $(xy + 5)^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow (x^2y^2 + 10xy + 25) - 2xy = x^2 + y^2 - 2xy \Rightarrow x^2y^2 + 8xy + 25 = (x - y)^2 \Rightarrow (xy + 4)^2 + 9 = (x - y)^2$. Поменяв местами слагаемые, по формуле разности квадратов:

$(xy+4)^2-(x-y)^2=-9 \Rightarrow [(xy+4)-(x-y)][(xy+4)+(x-y)]=-9$.

Осталось найти целые решения систем вида $\begin{cases}(xy+4)-(x-y)=a,\\ (xy+4)+(x-y)=b,\end{cases}$ где a и b множители в разложении числа -9 на целые сомножители: (1; –9), (–1; 9), (9; –1), (–9; 1), (3; –3), (–3; 3). В итоге, выясняется, что исходное уравнение имеет следующие решения в целых числах: (5; 0), (–5; 0), (0; –5), (0; 5). **Ответ** (5; 0), (–5; 0), (0; –5), (0; 5).

8–задача

Вычислите сумму: $1\cdot(-1)^{s(1)}+2\cdot(-1)^{s(2)}+3\cdot(-1)^{s(3)}+\ldots+k\cdot(-1)^{s(k)}+\ldots+2021\cdot(-1)^{s(2021)}$. Здесь $s(k)=\dfrac{k^2+k+2}{2}$.

Решение Последовательно вычисляя значения функции $s(k)=\dfrac{k^2+k+2}{2}=\dfrac{k(k+1)}{2}+1$, обнаружим, что: *s(1) — четно; s(2) — четно; s(3) — нечетно; s(4) — нечетно; s(5) — четно; s(6) — четно; s(7) — нечетно; s(8) — нечетно;* и так далее. То есть, если исходную сумму разбить на подсуммы, состоящие из четырех последовательных слагаемых, два первых слагаемых будут иметь положительный знак, третий и четвертый — отрицательный. Поэтому, так как сумма в каждой скобке равна –4, получим $(1+2-3-4)+(5+6-7-8)+\ldots+(2017+2018-2019-2020)=-2020$. Поэтому, исходная сумма равна: $-2020+2021=1$. **Ответ:** 1

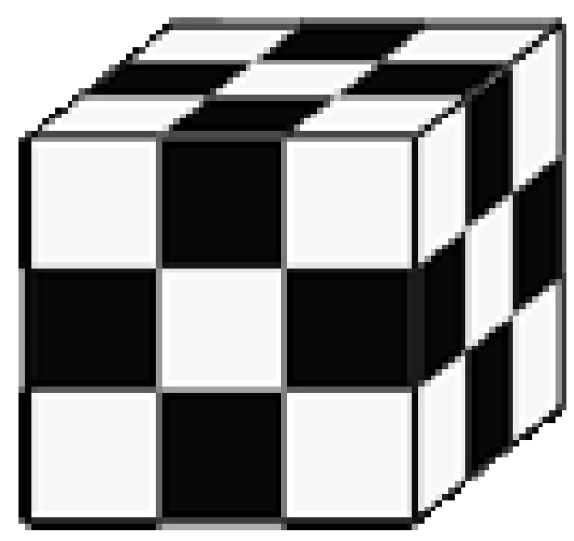
9–задача

Первый грузовик движется по прямой дороге, ведущей на юг, в то же время второй грузовик движется по другой прямой дороге и направляется на восток. В 13:30 первый грузовик находился ровно в 7 километрах к северу от второго грузовика. Если оба грузовика движутся с постоянной скоростью 30 километров в час, в какое время они будут точно в 13 километрах друг от друга?

Решение Поставив в соответствие направлению с запада на восток, как это обычно делается, ось ОХ, а направлению с юга на север — ось ОУ, получим, что вектор, описывающий движение первого грузовика, имеет координаты *(0; 7 – 30t),* второго — координаты *(30t; 0),* где через t обозначено время грузовиков в пути после 13:30. Поэтому, решение задачи получится из уравнения $(30t)^2 + (7 - 30t)^2 = 13^2$. Решив его, получим $t = 0{,}4$. Таким образом, выяснилось, что грузовики будут в 13 километрах друг от друга в: $13{,}5 + 0{,}4 = 13{,}9$ часов, или, другими словами, в 13 часов 54 минуты.

Ответ: в 13 часов 54 минуты.

10–задача



Мышь грызет кусочек сыра в форме куба с ребром 3, разбитый на 27 единичных кубиков. Когда она съедает какой– то кубик, то переходит к следующему, который имеет общую грань с предыдущим. Может ли мышь, действуя таким образом, скушать весь кусок сыра, кроме центрального единичного кубика? Аргументируйте ответ.

Решение Раскрасим кубик в два цвета, через один, следующим способом. Имеется всего 27 кубиков. Поэтому, для того чтобы съесть все кубики, кроме центрального, придется съесть 13 белых и 13 черных. Но, имеется всего 14 белых и 13 черных, причем центральный является черным. Поэтому ответ: не может. **Ответ:** не может.

10 КЛАСС

1–задача

В два сосуда налили одинаковое количество жидкости. В итоге первый заполнен на три четверти, второй на четыре пятых. Какая часть второго сосуда останется заполненной, если из него наполнить первый сосуд?

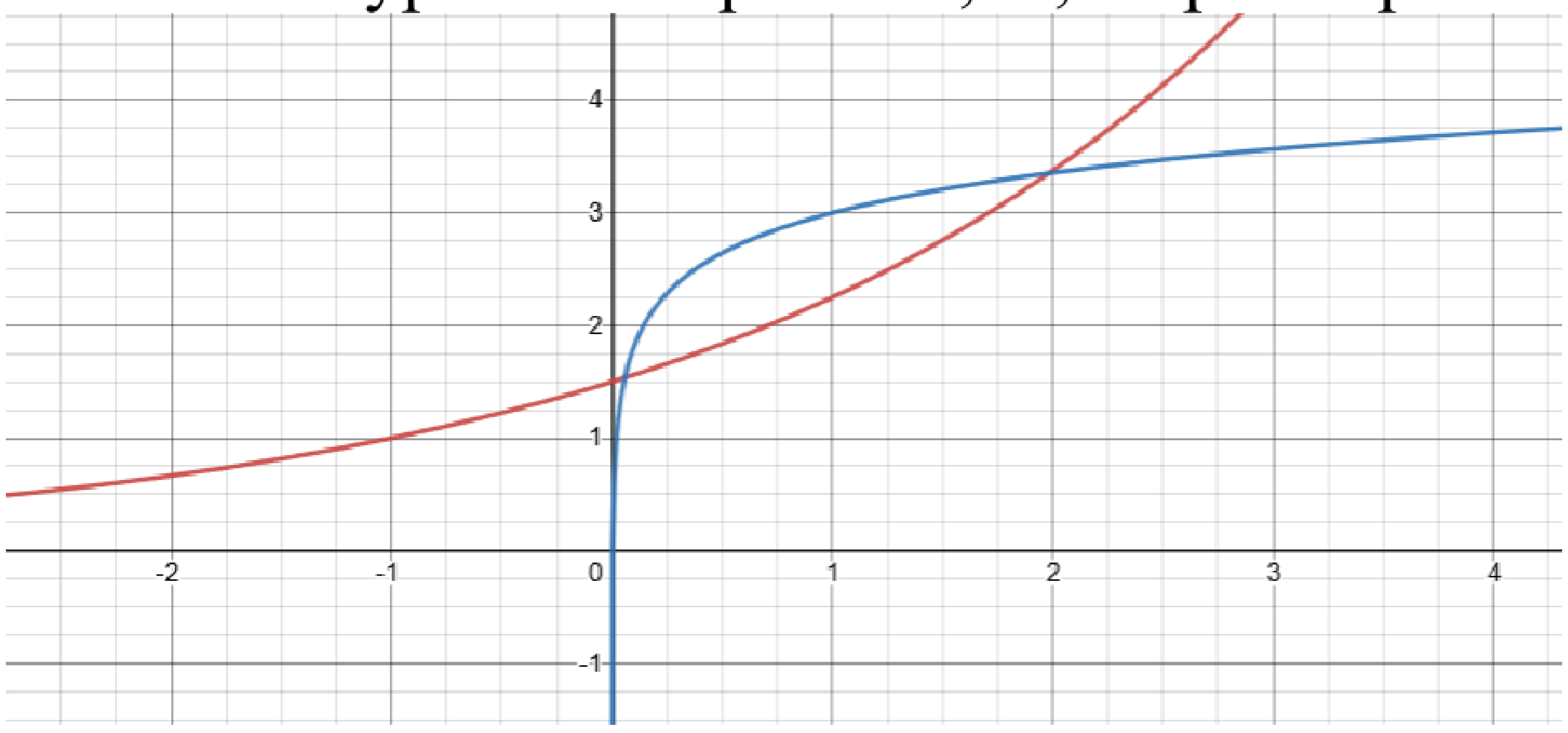
Решение Решение задачи легко получить, предположив, что в сосуды было влито по 12 литров жидкости. Тогда, первый сосуд имеет объем 16 литров, второй — 15 литров.

Отсюда, ответ: останется заполненной восемь пятнадцатых второго сосуда. **Ответ**: восемь пятнадцатых.

2–задача

Сколько корней имеет уравнение $1,5^{x+1} = log_7 x + 3$?

Решение Нужно вспомнить графики показательной и логарифмической функций, и принять во внимание то, что при $x = 1$, левая часть уравнения равна 2,25, а правая равна 3.

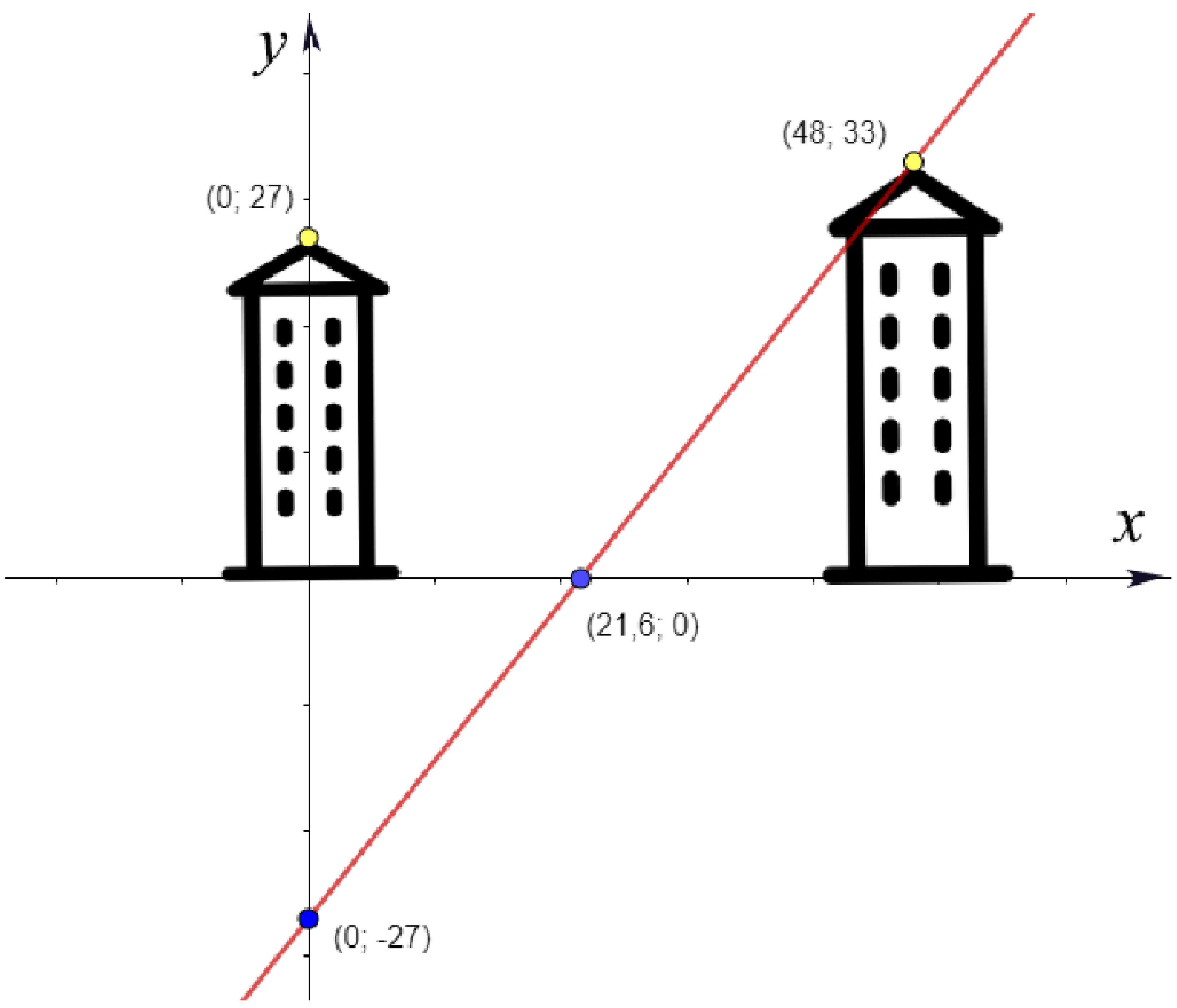


Ответ: 2

3–задача

В старинном городе две башни расположены на расстоянии 48 метров друг от друга, первая высотой 27 метров, вторая — 33 метра. На них живут вóроны, которых подкармливает служитель. Однажды, он положил кусок мяса между башнями. Увидев это, с вершины первой башни слетел ворон, схватил мясо и взлетел на вершину второй башни. На каком расстоянии от второй башни было мясо, если ворон затратил на весь полет минимально возможное время? Предполагаем, что ворон летел с постоянной скоростью.

Решение Задача легко решается, если ввести систему



координат с началом в основании первой башни, и знать, что минимум времени будет при полете по прямой.

Итак, вершина первой башни имеет координаты (0; 27), вершина второй башни имеет координаты (48; 33).

Далее, главный момент — нужно симметрично отразить точку (0; 27) вниз и соединить прямой точки (0; –27) и (48; 33). Пересечение этой прямой: $y = 1{,}25x - 27$ с осью координат дает нужную точку — точку (21,6; 0).
Соответственно, ответ: 48 – 21,6 = 26,4 метра.
Ответ: 26,4 м.
4–задача
Вычислите сумму: $1\cdot(-1)^{s(1)}+2\cdot(-1)^{s(2)}+3\cdot(-1)^{s(3)}+\ldots$
$+\ k\cdot(-1)^{s(k)}+\ldots+2021\cdot(-1)^{s(2021)}$. Здесь $s(k)=\dfrac{k^2+k+2}{2}$.

Решение ***Смотри задачу 8 для 9 класса***.
5–задача
Привести пример многочлена $P(x)$ степени 2021, для которого выполняется тождество: $P(x) + P(2020 - x) = 2020$.
Решение Например, $P(x) = (x - 1010)^{2021} + 1010$.
Тогда, $P(2020 - x) = (2020 - x - 1010)^{2021} + 1010 =>$
$P(2020 - x) = (1010 - x)^{2021} + 1010 =>$
$P(2020 - x) = -(x - 1010)^{2021} + 1010 => P(x) + P(2020 - x) = 2020$.
Ответ: $P(x) = (x - 1010)^{2021} + 1010$.
6–задача
На доске записано натуральное число X. Кайрат дописал справа к нему четыре цифры. Полученное число равно сумме всех натуральных чисел от 1 до X. Найти число X.
Решение Пусть Кайрат приписал число Y. Для него верны неравенства $0 \le Y \le 999$. Полученное число равно $10000X + Y$. С другой стороны, это число равно $1+2+\ \ldots\ + X = X(X+1)/2$. Значит, $10000X + Y = X(X+1)/2 => 20000X + 2Y = X(X+1) =>$ $2Y = X(X+1) - 20000X => 2Y = X(X - 19999)$. Отсюда, $0 \le X(X - 19999) \le 19998$. Неравенство $0 \le X(X - 19999)$ верно только при $X \ge 19999$, а неравенство $X(X - 19999) \le 19998$ при $X < 20000$. Значит, $X = 19999$. **Ответ:** 19999.
7–задача
Первый грузовик движется по прямой дороге, ведущей на юг, в то же время второй грузовик движется по другой прямой дороге и направляется на восток. В 13:30 первый грузовик находился ровно в 7 километрах к северу от второго грузовика. Если оба грузовика движутся с постоянной

скоростью 30 километров в час, в какое время они будут точно в 13 километрах друг от друга?

Решение ***Смотри задачу 9 для 9 класса.***

8–задача

Один из катетов прямоугольного треугольника площадью 30 м^2, меньше гипотенузы на 8 м. Найдите другой катет этого треугольника, зная, что длины сторон выражаются целыми числами.

Решение Обозначив катеты через a и b, получим систему $\begin{cases} 0,5ab = 30; \\ a^2 + b^2 = (a+8)^2. \end{cases}$ Раскрыв скобки во втором уравнении системы, получим $b^2 = 16a + 64.$ Выразив a, и подставив в первое, получим кубическое уравнение $b(b^2/16 - 4) = 60.$ Решение этого уравнения $b = 12.$ Тогда второй катет равен 5, а гипотенуза 13. (Для того чтобы найти решение кубического уравнения можно использовать метод подбора.) **Ответ:** *12 м*.

9–задача

Найдите сумму всех натуральных решений неравенства
$(19x - 2x^2 - 44)log_5(2x - 5) \geq 0.$

Решение Соответствующее квадратное уравнение имеет корни 4 и 5,5, область допустимых значений: $x > 2,5.$ Используя метод интервалов, получим решение неравенства: $(2,5;\ 3]U[4;\ 5,5].$ Поэтому, сумма всех натуральных решений равна 12. **Ответ:** *12*.

10–задача

Сколько решений в целых числах у уравнения $XY^2Z^3 = 576$?

Решение Число 576 можно разложить: $576 = 2^6 \cdot 3^2$. Поэтому, $X\cdot Y^2 \cdot Z^3 = 2^6 \cdot 3^2$. Значит возможны натуральные решения: Z = 1 или Z = 2 или Z = 4.

1) Z = 4 , тогда Y= 1 или Y= 3, то есть 2 решения.

2) Z = 2 , тогда Y= 1 или Y= 2 или Y= 3 , или Y= 6, то есть 4 решения.

3) Z = 1, тогда Y= 1 или Y= 2 или Y= 3, или Y= 4 или Y= 6 или Y=8 или Y= 12 , или Y= 24; еще 8 решений.

Получаем 14 решений в натуральных числах. Но, учитывая, что допустимы и отрицательные целые числа, каждое из этих решений порождает четыре решения, то всего $14\cdot 4 = 56$

решений. Например, решение (9; 1; 4) порождает четыре решения: (9; 1; 4), (9; –1; 4), (–9; 1; –4), (–9; –1; –4).
Ответ: 56.

11 КЛАСС

1–задача

График квадратичной функции $f(x)= x^2 + 2px - p^2 + 7p - 2020$ пересекает координатные оси в трех точках: *A, B* и *C.* Определите, при каком значении *p* произведение длин отрезков *OA, OB* и *OC* будет наименьшим. (O — начало системы координат.)

Решение ***Смотри задачу 6 для 9 класса***

2–задача

Пусть $b_1,\ b_2,\ b_3,\ \dots$ члены геометрической прогрессии. Вычислите значение выражения $\sqrt{log_x y}$,

где $x = b_1 \cdot b_{156} \cdot b_{311} \cdot \dots \cdot b_{2016}$ *;* $y = b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \cdot \dots \cdot b_{2016}$.

Решение По условию задачи $b_1,\ b_2,\ b_3, \dots$ — члены геометрической прогрессии, поэтому $b_n = b_1q^{n-1}$. Тогда, $x = b_1{\cdot}b_{156}{\cdot}b_{311}{\cdot}\ \dots{\cdot}b_{2016} = (b_1q^0)(b_1q^{155})(b_1q^{310}){\cdot}\dots{\cdot}(b_1{\cdot}q^{2015}) = (b_1)^{14}q^{0\ +\ 155\ +\ 310\ +\ \dots\ +\ 2015} = (b_1)^{14}q^{7(2015)}$. Стоит отметить, что сумма ($0 + 155 + 310 + \dots + 2015)$ имеет 14 слагаемых, так как $2015/155 = 13$. Так же, $y = b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \cdot \dots \cdot b_{2016} = (b_1q^0)(b_1q^1)(b_1q^2) \cdot \dots \cdot (b_1q^{2015}) = (b_1)^{2016}q^{0\ +\ 1\ +\ 2\ +\ \dots\ +\ 2015} = (b_1)^{2016}q^{1008(2015)}$. Здесь важно заметить, что $2016 = 14{\cdot}144;\ 1008 = 7{\cdot}144$. Поэтому, $y = (b_1)^{2016}q^{1008(2015)} = (b_1)^{14\cdot144}q^{7\cdot144(2015)} = [(b_1)^{14}q^{7(2015)}]^{144} = x^{144}$. Таким образом, $log_xy= log_x x^{144} =144,$ и, отсюда, $\sqrt{log_x y} = 12.$ **Ответ:** 12.

3–задача

Найти решение уравнения $\sqrt{6}cosx + \sqrt{2}|\sin x| = 2$.

Решение Разделим уравнение на $2\sqrt{2}$ и получим $\frac{\sqrt{3}}{2}cosx+\frac{1}{2}|sinx|=\frac{1}{\sqrt{2}}$. Теперь примем во внимание то, что $\frac{\sqrt{3}}{2}=sin\frac{\pi}{3};\ \frac{1}{2}=cos\frac{\pi}{3}$ и получим, $sin\frac{\pi}{3}cosx+cos\frac{\pi}{3}|sinx|=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot$

Далее, воспользуемся формулой косинуса разности углов для случая $sinx \geq 0$ и формулой косинуса суммы углов для случая $sinx < 0$ и рассмотрим два случая:

1. $\begin{cases}\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin x\geq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\frac{\pi}{6}\pm\frac{\pi}{4}+2\pi k, k\in Z,\\ \sin x\geq 0\end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{5\pi}{12}+2\pi k, k\in Z;$

2. $\begin{cases}\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin x< 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-\frac{\pi}{6}\pm\frac{\pi}{4}+2\pi k, k\in Z,\\ \sin x\geq 0\end{cases} \Leftrightarrow x=-\frac{5\pi}{12}+2\pi k, k\in Z.$

Ответ: $x=\pm\frac{5\pi}{12}+2\pi k, k\in Z\cdot$

4–задача

Даны положительные целые числа *a, b, c, d.* Найдите наибольшее значение *bd,* если *ab + cd = 2020.*

Решение ***Смотри задачу 5 для 9 класса***.

5–задача

На доске записано натуральное число X. Кайрат дописал справа к нему четыре цифры. Полученное число равно сумме всех натуральных чисел от 1 до X. Найти число X.

Решение ***Смотри задачу 6 для 10 класса.***

6–задача

Углы треугольника *ABC* находятся в отношении *1:5:6* к друг другу. Большая сторона этого треугольника AC равна 40 см. Чему равна высота BH, проведенная к этой стороне?

Решение Из условия получаем, что углы можно считать равными *x, 5x* и *6x* Тогда, так как сумма углов треугольника равна 180°, имеет место уравнение $x + 5x + 6x = 180°$. Отсюда следует, что углы этого треугольника равны *15°, 75°, 90°.* Итак, исходный треугольник ABC является прямоугольным, с гипотенузой AC равной 40 см и острым углом CAB равным *15°.* Поэтому, катеты треугольника ABC, согласно определениям тригонометрических функций равны: $AB = AC\cos 15° = 40\cos 15°$; $BC = AC\sin 15° = 40\sin 15°$.

Так как площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения катетов, площадь прямоугольного треугольника ABC равна $0{,}5\cdot 40\sin 15°\cdot 40\cos 15°$. В то же время, площадь прямоугольного треугольника ABC равна $0{,}5\cdot AC\cdot BH$ — половине произведения длин основания AC и высоты BH. Следовательно, $0{,}5\cdot 40\sin 15°\cdot 40\cos 15° = 0{,}5\cdot 40\cdot BH$.
Осталось воспользоваться формулой синуса двойного угла:
$2\sin x\cdot\cos x = \sin 2x$ и тем, что $\sin 30° = 0{,}5$ и получить ответ.
Итак, $BH = 40\sin 15°\cdot\cos 15° = 40\sin 30°/2 = 40\cdot 0{,}5/2 = 10$ см.
Ответ: *10 см*.

7–задача

Решите неравенство: $(2x^2 + 5x + 19)^{1/2} - (2x^2 - 3x - 5)^{1/2} > 4$.

Решение По нашему мнению, неравенства лучше всего, за исключением некоторых специальных случаев, решать методом интервалов. На этом пути нужно:

a) найти область определения;

b) заменить в неравенстве знак неравенства на равенство и решить полученное уравнение;

c) разбить область определения на интервалы корнями уравнения;

d) взять по одной точке из полученных интервалов, и вычислив в них значения соответствующих выражений, выбрать те, в которых выполняется исходное неравенство.

Давайте действовать по порядку.

a) Область определения задачи — это точки, в которых выражения под квадратным корнем неотрицательны. Трехчлен $2x^2 + 5x + 19$ положителен при всех значениях x.
Поэтому область допустимых значений неравенства совпадает с решением неравенства $2x^2 - 3x - 5 \geq 0$ — множеством $(-\infty; -1] \cup [2{,}5; +\infty)$.

b) Решим уравнение $(2x^2 + 5x + 19)^{1/2} - (2x^2 - 3x - 5)^{1/2} = 4$.
Для этого обозначим $(2x^2 + 5x + 19)^{1/2} = a$; $(2x^2 - 3x - 5)^{1/2} = b$.

Тогда: $\begin{cases} a - b = 4, \\ a^2 - b^2 = 8x + 24, \end{cases} <=> \begin{cases} a - b = 4, \\ a + b = 2x + 6, \end{cases} <=> \begin{cases} a = x + 5, \\ b = x + 1. \end{cases}$

Отсюда, $(2x^2 - 3x - 5)^{1/2} = x + 1$. Возведём обе части этого уравнения в квадрат, приведем подобные члены и получим уравнение: $x^2 - 5x - 6 = 0$ с корнями $x_1 = -1$; $x_2 = 6$.

Подставим найденные значения в исходное уравнение и убедимся в том, что они являются корнями.

c) Разобьём область определения на интервалы корнями уравнения: $(-\infty; -1) \cup [2,5; 6) \cup (6; +\infty)$.

d) Точка -10 принадлежит промежутку $(-\infty; -1)$. Подставив в исходное неравенство: $(2(-10)^2 + 5(-10) + 19)^{1/2} - (2(-10)^2 - 3(-10) - 5)^{1/2} > 4$, получаем неверное утверждение. То есть промежуток $(-\infty; -1)$ в решение не входит.
Точка 5 принадлежит промежутку $[2,5; 6)$. Вычислив значение выражения $(2x^2 + 5x + 19)^{1/2} - (2x^2 - 3x - 5)^{1/2}$ в точке $x = 5$, получим приблизительно 4,1276. То есть промежуток $[2,5; 6)$ в решение входит. Из промежутка $(6; +\infty)$ возьмем точку 10. Значение выражения $(2x^2 + 5x + 19)^{1/2} - (2x^2 - 3x - 5)^{1/2}$ в точке $x = 10$ приблизительно равно 3,556. Следовательно, этот промежуток в решение не входит. Итак, решением неравенства является множество $[2,5; 6)$.

Ответ: $[2,5; 6)$.

8–задача

Один из катетов прямоугольного треугольника площадью 30 м^2, меньше гипотенузы на 8 м. Найдите другой катет этого треугольника, зная, что длины сторон целые (в м.) числа.

Решение ***Смотри задачу 8 для 10 класса***.

9–задача

Найти номер члена последовательности $1, 8, 22, 43, 71...$, который равен 35351.

Решение Заметим, что $8 = 1 + 7$; $22 = 8 + 14 = 8 + 2\cdot7$; $43 = 22 + 21 = 22 + 3\cdot7$; $71 = 43 + 4\cdot7$; ... .
Поэтому, обозначив $x_1 = 1$; $x_2 = 8$; $x_3 = 14$; ... ,
получим разностное уравнение $x_n = x_{n-1} + (n-1)\cdot7 \Leftrightarrow$
$x_n - x_{n-1} = (n-1)\cdot7$. Соответственно, обозначив искомый номер через N, получим уравнение $x_N - x_{N-1} = 35350$. Решим это уравнение, воспользовавшись равенством: $x_N - x_1 =$

$=(x_N - x_{N-1}) + (x_{N-1} - x_{N-2}) + \ldots + (x_3 - x_2) + (x_2 - x_1)$. Заменив каждую скобку на соответствующее выражение из равенства $x_n - x_{n-1} = (n-1)\cdot 7$, получим, $35350 = x_N - x_1 = (N-1)\cdot 7 + (N-2)\cdot 7 + \ldots + 2\cdot 7 + 7$. Так как правая часть этого уравнения является суммой членов арифметической прогрессии: $35350 = [(N-1)\cdot 7 + 7](N-1)/2$. Раскрыв скобки, запишем полученное квадратное уравнение в стандартной форме: $N^2 - N - 10100 = 0$. Его положительный корень является искомым номером. **Ответ**: 101

10–задача

Сколько корней имеет уравнение $1{,}5^{x+1} = \log_7 x + 3$?

Решение *Смотри задачу 2 для 10 класса.*

2021–2022. ПЕРВЫЙ ТУР. ЗАДАЧИ

6 КЛАСС

1. В одной из школ города Бишкека на собрание 6 "А" класса пришли родители всех 35 учеников. При этом отцов было 25, а матерей 29. Найдите количество учеников, у которых на собрание пришли оба родителя.

а) 35 б) 10 в) 6 г) 16 д) 19 е) 4

2. Болот сейчас старше своей внучки Алины в 8 раз, а 3 года назад был старше в 15 раз. На сколько лет Болот старше Алины?

а) 45 б) 44 в) 43 г) 42 д) 40 е) 48

3. Средний возраст 33–х богатырей, героев произведения А. С. Пушкина «Сказка о царе Салтане», равен 38 годам. Если к ним в гости приходит дядька Черномор, то средний возраст компании станет 39 лет. Сколько лет дядьке Черномору?

а) 70 б) 68,5 в) 78 г) 72 д) 73 е) 67

4. Чынгыз согласился работать по контракту, по условиям которого, в конце года он получит смартфон и 16000 сомов. Спустя 9 месяцев он уволился и получил за работу смартфон и 7000 сомов. Сколько стоил смартфон?

а) 15100 б) 20000 в) 25000 г) 30500 д) 35050 е) 40000

5. Найти наименьшее возможное значение выражения $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$, если a, b, c, d – различные цифры, кроме 0.

а) $\frac{13}{60}$ б) $\frac{5}{12}$ в) $\frac{23}{72}$ г) $\frac{25}{72}$ д) $\frac{26}{72}$ е) $\frac{19}{60}$

6. Асан и Бакай одновременно отправились из библиотеки в парк аттракционов, расстояние между которыми S. Асан поехал на самокате со скоростью 10 км/час, а Бакай — на автобусе со скоростью, в 2,5 раза большей скорости Асана. На полпути автобус сломался, и оставшуюся часть пути Бакай прошёл пешком со скоростью, в два раза меньше, чем у Асана. Кто из них раньше прибыл в парк аттракционов? Чему равна разница во времени прибытия?

а) Асан, $S/20$ б) Асан, $S/50$ в) Асан, $S/5$
г) Бакай, $S/15$ д) Бакай, $S/30$ е) Бакай, $S/80$

7. В записи: МИ·МИ = МОЛЬ, каждая буква обозначает цифру. Какую цифру обозначает буква Ь?

а) 0 б) 2 в) 3 г) 4 д) 5 е) 9

8. В городе Матабат дома нумеруются особым образом. Так, на улице Айтаман дома последовательно занумерованы числами 291, 303, 309, 321, 327, a, b, c, d, e, f, 393, 399, … . Определите, какие числа обозначены буквами a, b, c, d, e, f, и найдите сумму $a + b + c + d + e + f$.

а) 1940 б) 2082 в) 2160 г) 1598 д) 2330 е) 1956

9. Обыкновенную дробь $20/21$ записали в виде десятичной дроби. Какая цифра стоит на 2021 месте после запятой?

а) 9 б) 8 в) 6 г) 5 д) 3 е) 2

10. По итогам конференции, 52% участников получили сертификат за хороший доклад. Довольны итогами конференции остались 80% участников, причем 60% из них получили сертификаты. Какая часть недовольных итогами конференции участников получили сертификат?

а) 1/2 б) 1/33 в) 1/48 г) 1/5 д) 1/62 е) 1/18

7 КЛАСС

1. Айбек выращивает клубнику. Он решил, что будет увеличивать производство и сделает в 2025 году квадратную грядку с клубникой, сторона которой будет на 9 кустов клубники длиннее стороны имеющейся квадратной грядки. Он подсчитал, что в итоге, в 2025 году у него будет на 2025 кустов клубники больше, чем в этом году. Сколько кустов клубники будет у Айбека в 2025 году?

а) 14641 б) 21351 в) 12600 г) 13689 д) 19881 е) 14161

2. У Бегимай в трёх пакетах лежат яблоки. В первом на 6 яблок меньше, чем в двух других вместе, а во втором на 10 яблок меньше, чем в первом и третьем. Сколько яблок в третьем пакете? а) 16 б) 12 в) 4 г) 8 д) 60 е) 48

3. Жибек решила заняться спортом и начала с приседаний. В первый день Жибек сделала 10 приседаний и далее решила работать по графику: на второй день (+2) приседания, по сравнению с предыдущим днем, на третий день (−1) приседание, по сравнению с предыдущим днем, потом опять (+2) приседания, по сравнению с предыдущим днем, затем (−1) приседание по сравнению с предыдущим днем и т.д. На какой день Жибек должна будет присесть 88 раз?

а) 154 б) 160 в) 158 г) 152 д) 164 е) 148

4. На краю круглой лужайки семь эльфов построили себе семь домиков. Между каждыми двумя домиками протоптана тропинка. Сколько всего таких тропинок на этой лужайке?

а) 12 б) 32 в) 15 г) 42 д) 21 е) 27

5. В качестве гонорара за концерт Н. Матвиенко может получить \$$Y$. Здесь X и Y корни уравнения $X \cdot Y + 3Y = 2022$, являющиеся натуральными числами. Найти наибольшее возможное значение Y.

а) 2022 б) 1011 в) 674 г) 337 д) 111 е) 22

6. Если 4725 умножить на натуральное число a, то получится квадрат целого числа, а если 4725 умножить на натуральное число b, то получится куб целого числа. Найдите наименьшее возможное значение $a + b$.

а) 251 б) 231 в) 345 г) 234 д) 199 е) 266

7. В 8 часов утра Атай и Абай выехали навстречу друг другу из двух городов. Они планировали встретиться на полпути между двумя городами, но так как Атай ехал на 10 км/ч быстрее, чем Абай, они встретились в точке, расположенной в 12 км от середины пути. Когда они встретились, Атай сказал: «Если бы я знал, что ты будешь ехать так медленно, я бы выехал на час позже и тогда бы мы встретились ровно на середине пути». Найдите расстояние между городами.

а) 115 б) 120 в) 216 г) 240 д) 408 е) 440

8. Айдай может приготовить плов за один час, Айдар за полтора часа. В 19.00 Айдай начала готовить плов, а в 19 часов 20 минут к ней присоединился Айдар. В какое время был готов плов? а) 19 часов 30 минут б) 19 часов 55 минут в) 19 часов 48 минут г) 19 часов 51 минут д) 19 часов 44 минут е) 19 часов 39 минут

9. Проверяя бухгалтерский отчет фирмы, в котором были только натуральные числа, Саадат выяснила, что прибыль составила седьмую часть выручки, а расходы на рекламу девятнадцатую часть выручки. При этом, при вычислении отношения величины прибыли к расходам на рекламу получился остаток 100. На сколько прибыль больше расходов на рекламу? а) 240 б) 196 в) 239 г) 195 д) 294 е) 273

10. Из треугольника, со сторонами 27 см, 34 см, 39 см, вырезали треугольник, со сторонами 7 см, 4 см, 9 см. Определите периметр полученной фигуры.

а) 124 б) 1116 в) 109 г) 95 д) 112 е) 113

8 КЛАСС

1. Тынчтык решил заниматься баскетболом и купил себе в спортивном магазине баскетбольную майку.

- Стоимость покупки бы удвоилась, если бы он купил баскетбольную майку с шортами.
- Стоимость покупки была бы впятеро больше, если бы он купил баскетбольную майку с баскетбольной обувью.
- Стоимость покупки бы утроилась, если бы он купил баскетбольную майку и баскетбольный мяч.

Во сколько раз увеличилась бы стоимость покупки, если бы вместе с баскетбольной майкой Тынчтык купил баскетбольные обувь, шорты и мяч?

а) 2 б) 3 в) 4 г) 5 д) 6 е) 8

2. Чему равен радиус круга, если его площадь и длина окружности определены одним и тем же числом?

а) 1 б) 1,5 в) 2 г) 3 д) 3,14 е) 10

3. Из Бишкека в Талас и из Таласа в Бишкек выехали одновременно два автобуса и встретились через 3 ч. Первый автобус пришёл в Талас на 1,1 ч позже, чем второй в Бишкек. Во сколько раз скорость второго автобуса больше скорости первого? а) 1,5 б) 2 в) 1,2 г) 3,4 д) 2,2 е) 1,4

4. По мнению Малахова из чисел $\sqrt{2}$; $\sqrt[3]{3}$; $\sqrt[4]{4}$; $\sqrt[5]{5}$; $\sqrt[6]{6}$; $\sqrt[10]{10}$ самым большим является $\sqrt{2}$, а по мнению Галкина $\sqrt[10]{10}$. А что думаете Вы?

а) $\sqrt{2}$ б) $\sqrt[3]{3}$ в) $\sqrt[4]{4}$ г) $\sqrt[5]{5}$ д) $\sqrt[6]{6}$ е) $\sqrt[10]{10}$

5. Сколько решений имеет система уравнений:

$|X| + |Y| = 17$; $X^2 + Y^2 = 169$?

а) 0 б) 2 в) 4 г) 5 д) 6 е) 8

6. Дано четырёхзначное число X с различными ненулевыми цифрами. Сумма всех чисел, полученных перестановкой цифр числа X равна 73326. Найдите произведение цифр числа X.

а) 42 б) 60 в) 24 г) 32 д) 30 е) 56

7. Найти сумму всех трёхзначных чисел, для которых, верно, следующее утверждение: *при вычеркивании цифры, стоящей в разряде сотен, получается число в 9 раз меньшее, чем исходное число*.

а) 680 б) 725 в) 840 г) 1000 д) 1350 е) 1440

8. Москвина составила число

$$\frac{888888888\cdot 888888888}{1+2+3+4+5+6+7+8+7+6+5+4+3+2+1},$$

а Мишин составил число

$$\frac{999999999\cdot 999999999}{1+2+3+4+5+6+7+8+9+8+7+6+5+4+3+2+1}.$$

На сколько число Москвиной меньше числа Мишина?

а) 11111111 б) 1111111111 в) 0 г) 99999999
д) –11111111 е) –999999

9. Для того чтобы занять учеников на длительное время, учитель велел им вычислить произведение $\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{900}\right)$. Подскажите ответ.

а) 1/30 б) 31/60 в) 0,8 г) 9/199 д) 1/900 е) 899/23690

10. Айдар говорит, что возраст его сыновей можно определить через функции $\sqrt{2x^2+6x+13}$ и $\sqrt{x^2+3x-2}$, а при отдельных значениях x разность значений этих функций дает возраст дочери — 3 года. Найдите сумму этих значений x.

а) 1/3 б) 3 в) 8 г) 9 д) –1 е) –6

9 КЛАСС

1. Пугачева через точку О провела 3 прямые и насчитала 6 углов, с вершиной в этой точке. А по Вашему мнению, сколько получилось углов с вершиной в этой точке?

а) 3 б) 6 в) 9 г) 12 д) 15 е) 18

2. Мальцев считает, что уравнение $X^2YZ = 2020$ имеет 8 целочисленных решений. А по Вашему мнению, сколько решений в целых числах имеет это уравнение?

а) 6 б) 8 в) 12 г) 18 д) 30 е) 56

3. Если x_0 является корнем уравнения $x^{10}+x^6+x^2=1$, то, чему равно число $x_0^4+x_0^2-1$?

а) x_0^{16} б) x_0^{15} в) x_0^{14} г) x_0^{13} д) x_0^{11} е) x_0^{10}

4. Макарова считает, что уравнение $20x^2-17x-4xy+y+63=0$ имеет 2 целочисленных решения. А по Вашему мнению, сколько решений в целых числах имеет это уравнение?

а) 0 б) 1 в) 2 г) 3 д) 4 е) 5

5. Треугольник ABC имеет площадь 6 см^2. При этом длина AB равна 6 см, угол BAC равен 45°. Найдите тангенс угла CBA.

а) 0,5 б) 0,8 в) 1,2 г) 1,8 д) 0,4 е) 3,6

6. Найдите сумму всех действительных корней уравнения $(x^2-2x-1)^2 = x^3+33$.

а) 5 б) 0,8 в) 12 г) –18 д) –4 е) 3

7. Пусть 5 является наибольшей цифрой четырёхзначного числа, кратного 5, в записи которого все цифры различны. Сколько существует таких чисел?

а) 60 б) 96 в) 48 г) 36 д) 120 е) 84

8. В городе Матеран дома нумеруются особым образом. Так, на улице Айтаман дома последовательно занумерованы числами *291, 303, 309, 321, 327, a, b, c, d, e, f, 420, 426, …* Определите, какие числа обозначены буквами *a, b, c, d, e, f,* и найдите их сумму $a + b + c + d + e + f$.

а) 2841 б) 2241 в) 2160 г) 1932 д) 2359 е) 2256

9. Онегин утверждает, что внутри круга радиуса 3 лежат три точки, координаты которых удовлетворяют уравнению $x^2 + 4x\cos(x(2y + \pi)) + 4 = 0$. Сколько таких точек по Вашему мнению? а) 2 б) 4 в) 6 г) 3 д) 9 е) 5

10. Имеются три раствора соли *A, B* и *C*, отличающиеся друг от друга только концентрацией. Смешав 300 г *A* с 450 г *B* и 750 г *C* получили 54,7%–ный раствор. Затем, смешав 100 г *A* с 40 г *B* и 60 г *C* получили 47,4%–ный раствор. И наконец, смешав 150 г *A* с 250 г *B* и 100 г *C* получили 46,9%–ный раствор. Определите, какой будет концентрация соли (в %), если смешать 200 г *A* с 500 г *B* и 300 г *C*.

а) 20,1 б) 50,1 в) 35,11 г) 49,4 д) 55,1 е) 45,01

10 КЛАСС

1. На экзамене необходимо ответить на 40 вопросов. Каждый правильный ответ вознаграждается 5 баллами, но за неправильные ответы вычитается 2 балла, а те, которые не решались и остались без ответа, оцениваются в 0 баллов. Сколько правильных ответов получила ученица, оставившая без ответа в два раза больше вопросов, чем количество её неправильных ответов, и в итоге набрала 98 баллов?

а) 6 б) 12 в) 18 г) 22 д) 26 е) 28

2. Иванов в треугольнике, нарисованном Петровым, провел три медианы. Сколько получилось новых треугольников?

а) 3 б) 6 в) 9 г) 12 д) 15 е) 18

3. М. Казаков провел окружность через все точки пересечения графиков уравнений $y = x^2 + 3x - 16$ и $x = y^2 - 3y - 65$ Чему равен радиус этой окружности.

а) $\sqrt{83} + 0{,}1$ *б)* $\sqrt{76} + 0{,}6$ *в)* $9\frac{1}{6}$ *г)* $9\frac{2}{7}$ *д)* $\sqrt{86}$ *е)* $\sqrt{91}$

4. Галкин получит приз, если определит при каком значении выражения $x + y + z$, будет достигнуто наибольшее значение выражения $-100x + 12y + 120z - 20x^2 - 18y^2 - 75z^2 - 104$

Помогите Галкину.

а) $\frac{51}{50}$ б) $-\frac{51}{50}$ в) $\frac{41}{30}$ г) $-\frac{41}{30}$ д) $-\frac{83}{100}$ е) 0

5. Исходя из того, что $\frac{a^2 - 35b^2}{ab} = -2$, Алсу считает, что значения выражения $\frac{a^2 + 35b^2}{ab}$ равны ± 15. А по Вашему мнению, чему равно это выражение?

а) ± 15 б) ± 35 в) ± 5 г) ± 7 д) ± 29 е) ± 12

6. Оля утверждает, что уравнение $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x = 1$ имеет 5 корней, не превосходящих 2 по модулю. Сколько таких корней по Вашему мнению?

а) 8 б) 6 в) 9 г) 12 д) 15 е) 11

7. Каждая ячейка таблицы 29 × 29 содержит одно из чисел 17, 19, 21,. . . , 73, и каждое из этих целых чисел встречается 29 раз. Сумма всех чисел над главной диагональю в два раза больше суммы всех чисел под этой диагональю. Определите число в центральной ячейке таблицы.

а) 25 б) 45 в) 57 г) 61 д) 51 е) 33

8. Загитова считает, что система $\begin{cases} x^2 + y = 2; \\ x - 3y^2 = -2 \end{cases}$ имеет 2 решения. А по Вашему мнению, сколько решений $(x; y)$ имеет система? а) 0 б) 1 в) 2 г) 3 д) 4 е) 5

9. А. Алиев старается понять, при каких значениях m и k уравнению $x^2 + 2mx + k = 0$ удовлетворяют корни $2m$ и $m + k$. Помогите ему найти $m - k$.

а) 7,25 б) 10,15 в) 3,75 г) 5 д) 10,5 е) 18,75

10. Сидоров купил участок земли в форме трапеции, основание которой равно 7 см, длина отрезка, который параллелен основанию, проходит через точку пересечения диагоналей и заключен между боковыми сторонами трапеции, равна 4,2 см. Чему равна длина второго основания трапеции.

а) 10 б) 1,8 в) 2,2 г) 3 д) 4 е) 5,4

11 КЛАСС

1. Средний возраст студентов группы был равен их количеству. Это интересное свойство сохранилось и после того, как 23–летний студент выбыл из группы. Сколько студентов сейчас в группе?

а) 46 б) 23 в) 22 г) 13 д) 11 е) 12

2. Медведев, зная, что $\left(\frac{20}{21}\right)^{\log_{2021}x} = \left(\frac{21}{20}\right)^{\frac{1}{\log_y 2021}}$ собирается вычислить числовое значение выражения ($xy + 1956$). Помогите ему.

а) 1957 б) 1952 в) 1922 г) 1883 д) 1961 е) 2022

3. Сергеев разрезал деревянный куб с ребром 2 дм через середину большой диагонали, плоскостью перпендикулярной к ней. Затем он покрасил полученные фигуры. Сколько грамм краски было израсходовано, если на 1 дм^2 тратится 20 г?

а) 688 б) 487 в) 364 г) 583 д) 442 е) 766

4. В выражении 11 : 31 : 61 : 71 : 101 : 131 : 151 : 181 Арген расставил скобки всеми возможными способами. Сколько различных числовых значений получил Арген?

а) 46 б) 123 в) 128 г) 64 д) 101 е) 52

5. Найти наибольшее значение выражения $40x + 18y - 120z$, если $25x^2 + 4y^2 + 100z^2 = 121$.

а) 142 б) 152 в) 345 г) 235 д) 243 е) 187

6. Семь самураев съели 147 порций риса. При этом, количества порций, съеденных самураями, составило арифметическую прогрессию. Так как второй и пятый самурай оказались родственниками хозяина гостиницы, самураи заплатили только за 110 порций, съеденных остальными. Сколько порций риса съел шестой самурай?

а) 57 б) 19 в) 31 г) 29 д) 34 е) 38

7. Краснов хочет решить систему $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 12; \\ xy + yz + xz = 12. \end{cases}$ и найти значение $x^4 + 2y^2 + \sqrt{8z}$. Помогите ему.

а) 22 б) 18 в) 36 г) 29 д) 34 е) 28

8. В треугольнике *ABC,* с площадью *S,* проведена медиана *AM*. Точка *K* — середина *AM*. Прямая *BK* пересекает *AC* в точке *L*. Найти площадь треугольника *AKL*.

а) *S/6* б) *S/12* в) *S/28* г) *S/21* д) *S/16* е) *S/9*

9. Руководство фирмы «Прогресс» в честь очередного юбилея решило премировать своих сотрудников. В итоге, 77 сотрудников получили по 1 тысяче сомов, 76 — по 2 тысячи, 75 — по 3 тысячи, … , 2 — по 76 тысяч и один получил 77 тысяч. Сколько тысяч сомов было выделено на эти премии?

а) 72643 б) 90237 в) 84561 г) 27982 д) 81236 е) 79079

10. Машинист поезда, который двигался с постоянной скоростью, взглянув на счетчик пройденных километров, увидел двузначное число. Через час он увидел двузначное число, в котором предыдущие цифры поменялись местами. Еще через три часа он увидел трехзначное число, в котором между цифрами исходного числа появилась цифра 0. С какой скоростью шел поезд?

а) 43 б) 37 в) 45 г) 72 д) 36 е) 40

2021–2022. ВТОРОЙ ТУР. ЗАДАЧИ

9 КЛАСС

1. Атыркуль 10 раз выстрелила по стандартной мишени и выбила 90 очков. Сколько попаданий было в семерку, восьмерку и девятку, если десяток было четыре, а других попаданий и промахов не было?

2. Группу туристов решили рассадить по автобусам так, чтобы в каждом автобусе было одинаковое количество пассажиров.

Сначала в каждый автобус сажали по 22 человека, однако оказалось, что при этом один турист лишний. Когда же один автобус уехал пустым, то в оставшиеся автобусы все туристы сели поровну. Сколько было первоначально автобусов и сколько туристов было в группе, если известно, что в каждый автобус помещается не более 32 пассажиров.

3. В журнале класса каждый из 33 учеников имеет порядковый номер. Все номера перемножили и получили число $X = 33! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 33$. Сколькими нулями оканчивается число X?

4. Около треугольника со сторонами 2022, 2696, 3370 описана окружность. Найти радиус этой окружности.

5. Найдите сумму всех целых значений параметра a, при которых один из корней уравнения $(a^2+2a+3)x^2+(a-10)x+a-6=0$ больше 1, а другой — меньше 1.

6. Сколькими способами можно число 2022 представить в виде суммы двух натуральных слагаемых, произведение которых делится на 2022?

7. Сергей, Айдар и Амантай должны сделать 60 одинаковых деталей. Известно, что все трое вместе за 1 час делают 15 деталей. К работе приступил сначала Сергей. Он сделал 15 деталей, затратив на это более трех часов. Оставшуюся часть работы выполнили вместе Айдар и Амантай. На всю работу ушло 8 часов. За сколько часов мог бы изготовить 45 деталей один Сергей?

8. Имеются два сосуда, в первом из них 1 л воды, второй сосуд пустой. Последовательно проводятся переливания из первого сосуда во второй, из второго в первый и т. д., причем доля отливаемой воды составляет последовательно $1/2$, $1/3$, $1/4$ и т. д. от количества воды в сосуде, из которого вода отливается. Сколько воды будет в сосудах после 2021 переливания?

9. Лист бумаги разрезали на 5 частей, некоторые из этих частей разрезали на 5 частей, и т. д. Может ли за некоторое число разрезаний получиться 2022 листка бумаги?

10. Решите уравнение: $\sqrt{8x+1}-\sqrt{2x-2}=\sqrt{9x-2}-\sqrt{3x-5}$.

10 КЛАСС

1. На базаре продаются рыбки, большие и маленькие. Сегодня три больших и одна маленькая стоят вместе столько же, сколько пять больших вчера. А две большие и одна маленькая сегодня стоят вместе столько же, сколько три больших и одна маленькая вчера. Определите, что дороже: одна большая и две маленьких сегодня, или пять маленьких вчера.

2. На столе «лицом» вниз лежат 4 красные и 4 чёрные карты. Вы выбираете из них две случайным образом. Какова вероятность того, что эти две карты окажутся одного цвета?

3. Найдите наименьшее значение выражения y/x, если известно, что $x^2 - 8x + y^2 - 6y + 9 = 0$.

4. Известно, что t является корнем уравнения $x^3 - 7x + 1 = 0$. Найдите значение выражения $t^4 + 3t^3 - 7t^2 - 20t + 2025$.

5. Сергей, Айдар и Амантай должны сделать 60 одинаковых деталей. Известно, что все трое вместе за 1 час делают 15 деталей. К работе приступил сначала Сергей. Он сделал 15 деталей, затратив на это более трех часов. Оставшуюся часть работы выполнили вместе Айдар и Амантай. На всю работу ушло 8 часов. За сколько часов мог бы изготовить 45 деталей один Сергей?

6. Решить в целых числах уравнение $(x - 2y)(x + y) = 7$.

7. Решите уравнение:

$$sinx + sin^3x + 2022sin^5x = cos(2x) + cos^3(2x) + 2022cos^5(2x).$$

8. Фирма получает яблочный и виноградный сок в одинаковых бидонах и выпускает яблочно–виноградную смесь в одинаковых банках. Одного бидона яблочного сока хватает ровно на 6 банок смеси, а одного бидона виноградного — ровно на 10. Когда рецептуру напитка изменили, одного бидона яблочного сока стало хватать ровно на 5 банок смеси. На сколько банок смеси хватает теперь одного бидона виноградного сока? (Напиток водой не разбавляется.)

9. Стороны треугольника имеют длины, являющиеся последовательными членами арифметической прогрессии. Докажите, что высота, проведенная к средней, по длине, стороне, делит ее на части n и m, разность длин которых равна разности между седьмым и третьим членами упомянутой арифметической прогрессии.

10. Решите уравнение: $\sqrt{8x+1}-\sqrt{2x-2}=\sqrt{9x-2}-\sqrt{3x-5}$.

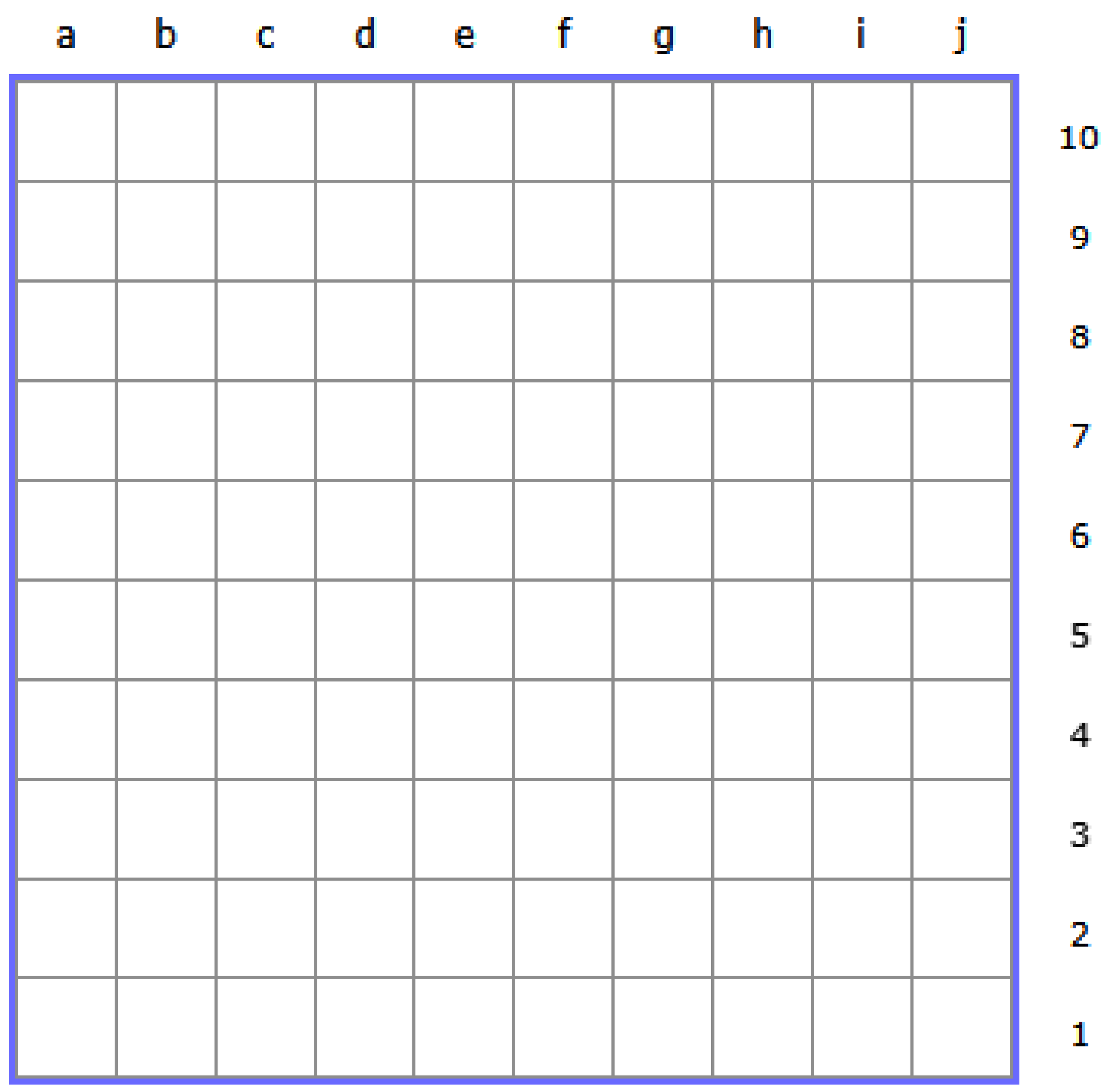
11 КЛАСС

1. В классе 25 детей. Для дежурства наугад выбирают двоих. Вероятность того, что оба дежурных окажутся мальчиками, равна *3/25*. Сколько в классе девочек?

2. Пусть a и b – целые числа. Докажите, что если $a^2 + 9ab + b^2$ делится на 11, то *и* $a^2 - b^2$ делится на 11.

3. Сколько решений имеет уравнение $x^4 + y^3 + z^2 + t = 270$, если числа x, y, z, t являются четными, натуральными?

4. Арген построил векторы с началом в центре клетки b4 и концами в центрах всех остальных клеток доски (см. рис. 1). Найдите модуль суммы этих векторов, зная, что сторона клетки доски равна 1.



5. Из бесконечной последовательности: $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5};\ldots$ выберите семь чисел, которые составляют арифметическую прогрессию.

6. Сергей, Айдар и Амантай должны сделать 60 одинаковых деталей. Известно, что все трое вместе за 1 час делают 15 деталей. К работе приступил сначала Сергей. Он сделал 15 деталей, затратив на это более трех часов. Оставшуюся часть работы выполнили вместе Айдар и Амантай. На всю работу ушло 8 часов. За сколько часов мог бы изготовить 45 деталей один Сергей?

7. Решите уравнение:

$$\sin x + \sin^3 x + 2022\sin^5 x = \cos(2x) + \cos^3(2x) + 2022\cos^5(2x).$$

8. Имеются два сосуда, в первом из них 1 л воды, второй сосуд пустой. Последовательно проводятся переливания из первого сосуда во второй, из второго в первый и т. д., причем доля отливаемой воды составляет последовательно $1/2$, $1/3$, $1/4$ и т. д. от количества воды в сосуде, из которого вода отливается. Сколько воды будет в сосудах после 2021 переливания?

9. Для того, чтобы пройти 2 км пешком, проехать 3 км на велосипеде и 20 км — на машине, Айбеку требуется 1 час 6 мин. А если потребуется пройти 5 км пешком, проехать 8 км на велосипеде и 30 км — на машине, ему понадобится 2 часа 24 мин. Сколько времени потребуется Айбеку, чтобы пройти 4 км пешком, проехать 5 км на велосипеде и 80 км — на машине?

10. Решите уравнение: $\sqrt{8x+1} - \sqrt{2x-2} = \sqrt{9x-2} - \sqrt{3x-5}$.

2021–2022. ПЕРВЫЙ ТУР. РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

6 КЛАСС

1–задача

В одной из школ города Бишкека на собрание 6 "А" класса пришли родители всех 35 учеников. При этом отцов было 25, а матерей 29. Найдите количество учеников, у которых на собрание пришли оба родителя.

Решение Посчитаем, у скольких учеников мамы на собрание не пришли: 35 – 29 = 6 (мам). У 6 учеников на собрание не пришла мама, это означает что у них пришел только папа. У всех же остальных учеников, у которых на собрание пришел папа, мама тоже пришла. Вычтем из количества пришедших на собрание пап, количество пап пришедших без мам:

25 – 6 = 19.

Ответ: у 19 учащихся на собрание пришли и папа, и мама.

2–задача

Болот сейчас старше своей внучки Алины в 8 раз, а 3 года назад был старше в 15 раз. На сколько лет Болот старше Алины?

Решение Если Алине сейчас X лет, то Болоту $8X$. Три года назад Алине было $(X - 3)$ года, а Болоту $(8X - 3)$ года. По условию $(8X - 3) = 15(X - 3)$, значит $X = 6$. То есть, Алине сейчас 6 лет, а Болоту 48. Он старше на 42 года.

Ответ: 42.

3–задача

Средний возраст 33–х богатырей, героев произведения А. С. Пушкина «Сказка о царе Салтане», равен 38 годам. Если к ним в гости приходит дядька Черномор, то средний возраст компании станет 39 лет. Сколько лет дядьке Черномору?

Решение $38 \cdot 33 = 1254$ (года) – суммарный возраст 33–х богатырей. $39 \cdot (33+1) = 1326$ (лет) – суммарный возраст 33–х богатырей и дядьки Черномора. $1326 - 1254 = 72$ (года) дядьке Черномору. **Ответ:** дядьке Черномору 72 года.

4–задача

Чынгыз согласился работать по контракту, по условиям которого, в конце года он получит смартфон и 16000 сомов. Спустя 9 месяцев он уволился и получил за работу смартфон и 7000 сомов. Сколько стоил смартфон, который получил Чынгыз?

Решение Пусть x – стоимость смартфон, тогда $x + 16000$ — заработная плата за 12 месяцев, а $x + 7000$ — заработная плата за 9 месяцев. То есть, ежемесячная зарплата равнялась $(x + 16000)/12$ или $(x + 7000)/9$. Отсюда:

$9(x+16000) = 12(x+7000) \Rightarrow 9x + 144000 = 12x + 84000$

$\Rightarrow 12x - 9x = 144000 - 84000 \Rightarrow 3x = 60000 \Rightarrow x = 20000.$

Ответ: смартфон стоил 20000 сомов.

5–задача

Найти наименьшее возможное значение выражения $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$, если a, b, c, d – различные цифры, кроме 0.

Решение Числители должны быть наименьшими, знаменатели — наибольшими. Значит, в знаменателях должны быть 9 и 8, в числителях 1 и 2. Для того чтобы получить ответ достаточно сравнить соответствующие числа:

$\frac{1}{9}+\frac{2}{8}=\frac{26}{72}$; $\frac{1}{8}+\frac{2}{9}=\frac{25}{72}$. **Ответ:** $\frac{25}{72}$

6–задача

Асан и Бакай одновременно отправились из библиотеки в парк аттракционов, расстояние между которыми *S*. Асан поехал на самокате со скоростью 10 км/час, а Бакай — на автобусе со скоростью, в 2,5 раза большей скорости Асана. На полпути автобус сломался, и оставшуюся часть пути Бакай прошёл пешком со скоростью, в два раза меньше, чем у Асана. Кто из них раньше прибыл в парк аттракционов? Чему равна разница во времени прибытия?

Решение Так как скорость Асана 10 км/час, скорость Бакая на первой половине пути 25 км/час, а на второй половине пути 5 км/час. Тогда:

1) Время Асана: $t_А = S/10;$

2) Время Бакая: $t_Б = (S/2)/25 + (S/2)/5 = S/50 + S/10 = 6S/50;$

3) Разница во времени пути Асана и Бакая:

$t_Б - t_А = 6S/50 - S/10 = S/50.$

Ответ: Асан приехал в парк раньше, чем Бакай на *S/50* часов.

7–задача

В записи: МИ·МИ = МОЛЬ, каждая буква обозначает цифру. Какую цифру обозначает буква Ь?

Решение Двузначное число и его квадрат, являющийся четырехзначным числом, начинаются с одной и той же буквы. Непосредственной проверкой можно убедится в том, что необходимо проверить числа 95, 96, 97, 98, так как для всех двузначных чисел, меньших чем 95 (так, $94^2 = 8836$), первая цифра квадрата меньше первой цифры числа. Числа 95 и 96 не подходят, так как оканчиваются на цифру 5 или 6 соответственно, но буквы И и Ь обозначают разные цифры. Квадрат числа 97 оканчивается на цифру 9, что противоречит условию задачи о разных буквах. Подходит число 98, его квадрат 9604. Итак, буква Ь – это цифра 4. **Ответ:** 4

8–задача

В городе Матабат дома нумеруются особым образом. Так, на улице Айтаман дома последовательно занумерованы числами 291, 303, 309, 321, 327, *a, b, c, d, e, f,* 393, 399, … . Определите, какие числа обозначены буквами *a, b, c, d, e, f,* и найдите сумму $a + b + c + d + e + f$.

Решение Разница между следующим и предыдущим членами ряда есть последовательность 12, 6, 12, 6, …. .

Значит, $a = 339$, $b = 345$, $c = 357$, $d = 363$, $e = 375$, $f = 381$. Поэтому, $a + b + c + d + e + f = 2160$. **Ответ:** 2160

9–задача

Обыкновенную дробь *20/21* записали в виде десятичной дроби. Какая цифра при этом стоит на 2021 месте после запятой?

Решение

Разделив 20 на 21 получаем: $20/21=0{,}952380952380952380\ \ldots$

Здесь цифры повторяются с периодом 6. Разделив 2021 на 6 получаем: $2021 = 6\cdot 336 + 5$. После 336 полных периодов 5–я цифра — это 8. **Ответ:** 8

10–задача

По итогам конференции, 52% участников получили сертификат за хороший доклад. Довольны итогами конференции остались 80% участников, причем 60% из них получили сертификаты. Какая часть недовольных итогами конференции участников получили сертификат?

Решение Пусть, a количество участников. Тогда, сертификат получили $0{,}6\cdot 0{,}8a = 0{,}48a$ участников, довольных итогами конференции. Поэтому, среди недовольных результатами конференции $0{,}2a$ участников, призы получили $0{,}52a - 0{,}48a = 0{,}04a$ участников, т.е. $0{,}04a : 0{,}2a = 1/5$, одна пятая часть.

Ответ: *1/5*.

7 КЛАСС

1–задача

Айбек выращивает клубнику. Он решил, что будет увеличивать производство и сделает в 2025 году квадратную грядку с клубникой, сторона которой будет на 9 кустов клубники длиннее стороны имеющейся квадратной грядки. Он подсчитал, что в итоге, в 2025 году у него будет на 2025 кустов клубники больше, чем в этом году. Сколько кустов клубники будет у Айбека в 2025 году?

Решение Обозначим исходную сторону квадрата через *n*. Тогда: $(n+9)^2 – n^2 = 2025 => [(n+9) + n][(n+9) – n] = 2025 => (2n+9)9 = 2025 => n=108 => (108+9)^2=13689.$

Ответ: 13689 кустов

2–задача

У Бегимай в трёх пакетах лежат яблоки. В первом на 6 яблок меньше, чем в двух других вместе, а во втором на 10 яблок меньше, чем в первом и третьем. Сколько яблок в третьем пакете?

Решение Обозначим количество яблок в пакетах $x, y, z,$ соответственно. Тогда: $x + 6 = y + z$ и $y + 10 = x + z$. Сложим эти два уравнения: $x + y + 16 = x + y + 2z => 16 = 2z => z = 8$. Значит, в третьем пакете 8 яблок. **Ответ:** 8 яблок.

3–задача

Жибек решила заняться спортом и начала с приседаний. В первый день Жибек сделала 10 приседаний и далее решила работать по графику: на второй день (+2) приседания, по сравнению с предыдущим днем, на третий день (−1) приседание, по сравнению с предыдущим днем, потом опять (+2) приседания, по сравнению с предыдущим днем, затем (−1) приседание по сравнению с предыдущим днем и т.д. На какой день Жибек должна будет присесть 88 раз?

Решение Так как Жибек начала с 10 раз, то до 88 осталось: 88 − 10 = 78 приседаний. Так как Жибек работает по графику: $+2,$ по сравнению с предыдущим днем, $-1,$ по сравнению с предыдущим днем, $+2,$ по сравнению с предыдущим днем и т.д., то через каждые 2 дня она присядет +1 раз по сравнению с предыдущими 2 днями. Поэтому, $10+78$ приседаний она сделает через $78{\cdot}2 = 156$ дней. Но, числа 157 в ответах нет. Дело в том, что это будет второй раз, когда Жибек дойдет до 88 приседаний. В первый раз, она достигнет этой отметки через 153 дня, так как $10 + 76$ приседаний она сделает через 152 дня, а через 153 дня она сделает $10+76+2$ приседаний. Итак, она должна будет присесть 88 раз на 154 день. **Ответ:** 154

4–задача

На краю круглой лужайки семь эльфов построили себе семь домиков. Между каждыми двумя домиками протоптана тропинка. Сколько всего таких тропинок на этой лужайке?

Решение Обозначив домики буквами: A, B, C, D, E, F, G и перебрав все возможные варианты можно получить ответ: AB, AC, AD, AE, AF, AG, BC, BD, BE, … — всего 21. Для знающих комбинаторику, ответ: $C(7; 2) = 21$. **Ответ:** 21

5–задача

В качестве гонорара за концерт Н. Матвиенко может получить $\$Y$. Здесь X и Y корни уравнения $X \cdot Y + 3Y = 2022$, являющиеся натуральными числами. Найти наибольшее возможное значение Y.

Решение Запишем уравнение в виде: $Y(X + 3) = 2022$. Множитель Y тем больше, чем меньше $X + 3$. Так как число 2022 делится на: 1, 2, 3, 6 …, и X является натуральным числом, $X + 3$ будет больше, чем 3. Итак, среди делителей числа 2022 наименьшим возможным для $X + 3$ является 6. Поэтому, наибольший возможный $Y = 2022/6 = 337$.

Ответ: 337

6–задача

Если 4725 умножить на натуральное число a, то получится квадрат целого числа, а если 4725 умножить на натуральное число b, то получится куб целого числа. Найдите наименьшее возможное значение $a + b$.

Решение Разложив 4725 на простые множители, получаем $4725 = 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7$. Чтобы натуральное число было квадратом, необходимо чтобы показатели степеней в разложении на простые множители были чётными числами. Значит, наименьшее возможное $a = 3 \cdot 7 = 21$. Натуральное число будет кубом, если показатели степеней в разложении на простые множители кратны 3. Значит, наименьшее возможное $b = 5 \cdot 7^2 = 245$. Поэтому, ответ: $21 + 245 = 266$. **Ответ:** 266

7–задача

В 8 часов утра Атай и Абай выехали навстречу друг другу из двух городов. Они планировали встретиться на полпути между двумя городами, но так как Атай ехал на 10 км/ч быстрее, чем Абай, они встретились в точке, расположенной в 12 км от середины пути. Когда они встретились, Атай сказал: «Если бы я знал, что ты будешь ехать так медленно, я бы выехал на час позже и тогда бы мы встретились ровно на середине пути». Найдите расстояние между городами.

Решение Обозначим половину расстояния между городами через S. Тогда Атай проехал ($S+12$) км, а Абай ($S-12$) км. Обозначим скорость Абая через V, тогда скорость Атая будет $V+10$. Поэтому, $\frac{S+12}{V+10}=\frac{S-12}{V}$. Если бы Атай выехал на час позже, тогда бы они проехали одинаковое расстояние S и, $1+\frac{S}{V+10}=\frac{S}{V}$. Решим систему:

$$\begin{cases} \frac{S+12}{V+10}=\frac{S-12}{V} \\ 1+\frac{S}{V+10}=\frac{S}{V} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V(S+12)=(V+10)(S-12) \\ V(V+10)+VS=(V+10)S \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10S=24V+120 \\ V^2+10V=10S \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V^2+10V=24V+120 \Rightarrow V^2-14V-120=0 \Rightarrow V=20 \Rightarrow S=60$$

Таким образом, так как половина пути равна 60 км, весь путь равен 120 км. **Ответ:** 120 км.

8–задача

Айдай может приготовить плов за один час, Айдар за полтора часа. В 19.00 Айдай начала готовить плов, а в 19 часов 20 минут к ней присоединился Айдар. В какое время был готов плов?

Решение За ($60\cdot 90 = 5400$) минут Айдай может приготовить плов 90 раз, Айдар — 60 раз. Поэтому, работая вместе, они могут приготовить плов за $\frac{60\cdot 90}{90+60}=36$ минут. Поэтому, за первые 20 минут Айдай выполнит треть работы, а остаток — две трети они вместе выполнят за 24 минуты. Итого, за 44 минуты. **Ответ:** 19 часов 44 минуты

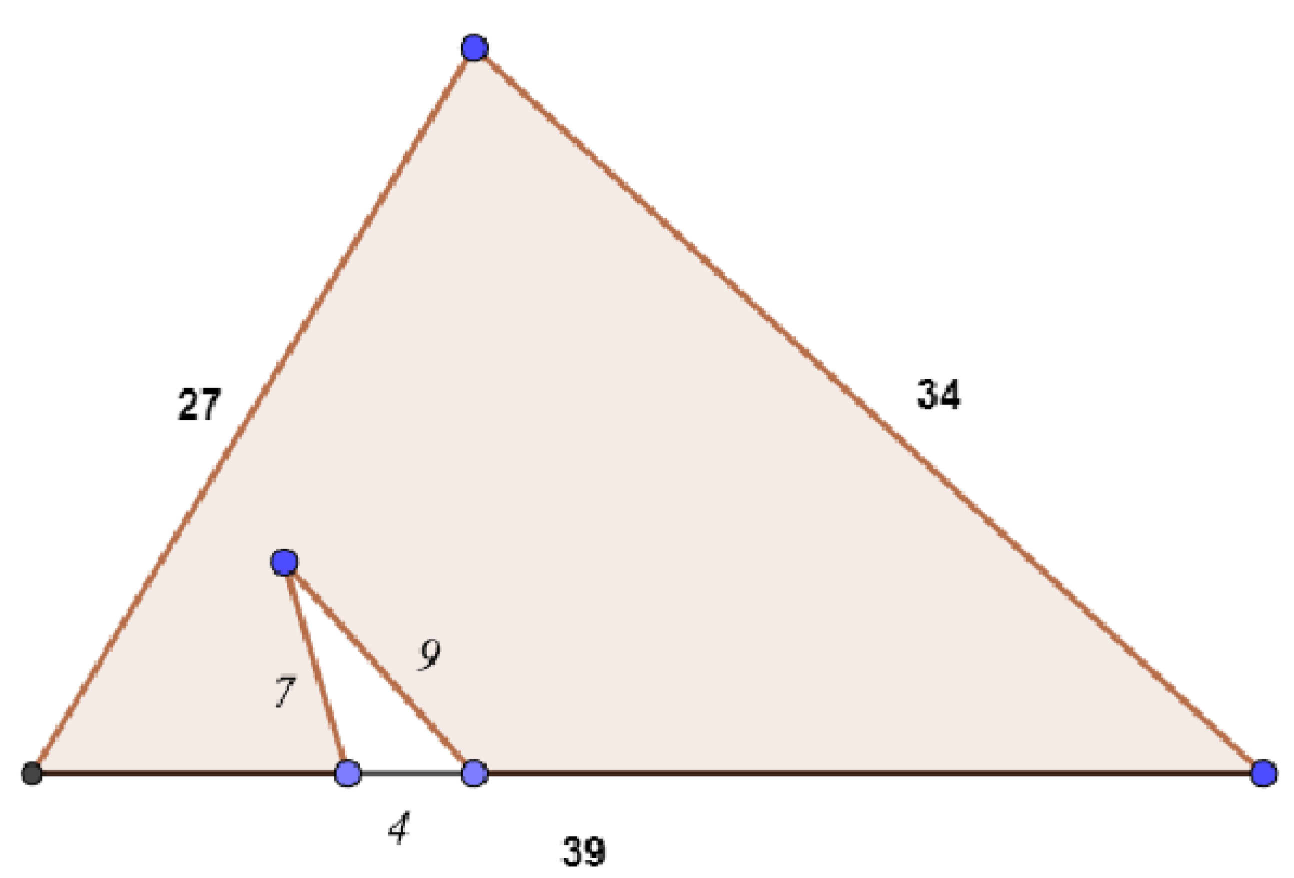
9–задача

Проверяя бухгалтерский отчет фирмы, в котором были только натуральные числа, Саадат выяснила, что прибыль составила седьмую часть выручки, а расходы на рекламу девятнадцатую часть выручки. При этом, при вычислении отношения величины прибыли к расходам на рекламу получился остаток 100. На сколько прибыль больше расходов на рекламу?

Решение Так как использовались только натуральные числа, выручку можно представить в виде $133x = 7 \cdot 19x$, где прибыль равна $19x$, а расходы на рекламу равны $7x$. Поэтому, имеет место равенство $19x = 7x \cdot 2 + 100$. Отсюда, $x = 20$. Таким образом, выручка равна $133 \cdot 20 = 2660$, прибыль 380, расходы на рекламу 140. **Ответ:** 240

10–задача

Из треугольника, со сторонами 27 см, 34 см, 39 см, вырезали треугольник, со сторонами 7 см, 4 см, 9 см. Определите периметр полученной фигуры.



Решение Задача имеет несколько решений, так как ответ зависит от того, как вырезать. Если вырезать так, чтобы на стороне исходного треугольника получился вырез 4 см, то получится фигура с периметром

$(27 + 34 + 39) - 4 + (7 + 9) = 112$ см. Остальные возможные варианты в списке ответов не значатся. **Ответ:** 112

8 КЛАСС

1–задача

Тынчтык решил заниматься баскетболом и купил себе в спортивном магазине баскетбольную майку.

- Стоимость покупки бы удвоилась, если бы он купил баскетбольную майку с шортами.
- Стоимость покупки была бы впятеро больше, если бы он купил баскетбольную майку с баскетбольной обувью.

• Стоимость покупки бы утроилась, если бы он купил баскетбольную майку и баскетбольный мяч.

Во сколько раз увеличилась бы стоимость покупки, если бы вместе с баскетбольной майкой Тынчтык купил баскетбольные обувь, шорты и мяч?

Решение Пусть баскетбольная майка стоила x. Поскольку баскетбольная майка с шортами стоят $2x$, то шорты тоже стоят x. Поскольку баскетбольная майка и обувь вместе стоят $5x$, то обувь стоит $4x$. Поскольку баскетбольная майка и мяч стоят $3x$, то мяч стоит $2x$. Тогда, если бы Тынчтык купил баскетбольные майку, обувь, шорты и мяч, то его покупка составила бы $x + x + 4x + 2x = 8x$, что в 8 раз больше, чем x.

Ответ: 8.

2–задача

Чему равен радиус круга, если его площадь и длина окружности определены одним и тем же числом?

Решение Так как площадь круга равна πr^2, а длина окружности $2\pi r$, при радиусе круга равном 2, площадь круга и длина окружности равны 4π. **Ответ:** 2

3–задача

Из Бишкека в Талас и из Таласа в Бишкек выехали одновременно два автобуса и встретились через 3 ч. Первый автобус пришёл в Талас на 1,1 ч позже, чем второй в Бишкек. Во сколько раз скорость второго автобуса больше скорости первого?

Решение Пусть скорость 1–го − x км/ч, 2–го − y км/ч, весь путь S. Тогда, имеет место система уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{S}{x} - \dfrac{S}{y} = 1{,}1; \\ 3x + 3y = S; \end{cases} <=> \begin{cases} Sy - Sx = 1{,}1xy; \\ x = S/3 - y; \end{cases} <=> \begin{cases} Sy - S(S/3 - y) = 1{,}1(S/3 - y)y; \\ x = S/3 - y. \end{cases}$$

Приведем подобные члены в первом уравнении:

$$Sy - S^2/3 + Sy = 1{,}1Sy/3 - 1{,}1y^2 <=> 3{,}3y^2 + 4{,}9Sy - S^2 = 0\,.$$

Отсюда, $D = (4{,}9S)^2 - 4\cdot 3{,}3\cdot S^2 = (6{,}1S)^2$. Поэтому, один из корней отрицательный — посторонний, а второй:

$y = \dfrac{-4{,}9S + 6{,}1S}{2 \cdot 3{,}3} = \dfrac{1{,}2S}{2 \cdot 3{,}3} = \dfrac{2S}{11}$. Тогда, $x = \dfrac{S}{3} - y = \dfrac{S}{3} - \dfrac{2S}{11} = \dfrac{5S}{33}$, и ответ: $\dfrac{2S}{11} : \dfrac{5S}{33} = \dfrac{2S}{11} \cdot \dfrac{33}{5S} = \dfrac{6}{5} = 1{,}2$. **Ответ:** в 1,2 раза

4–задача

По мнению Малахова из чисел $\sqrt{2}$; $\sqrt[3]{3}$; $\sqrt[4]{4}$; $\sqrt[5]{5}$; $\sqrt[6]{6}$; $\sqrt[10]{10}$ самым большим является $\sqrt{2}$, а по мнению Галкина $\sqrt[10]{10}$.
А что думаете Вы?

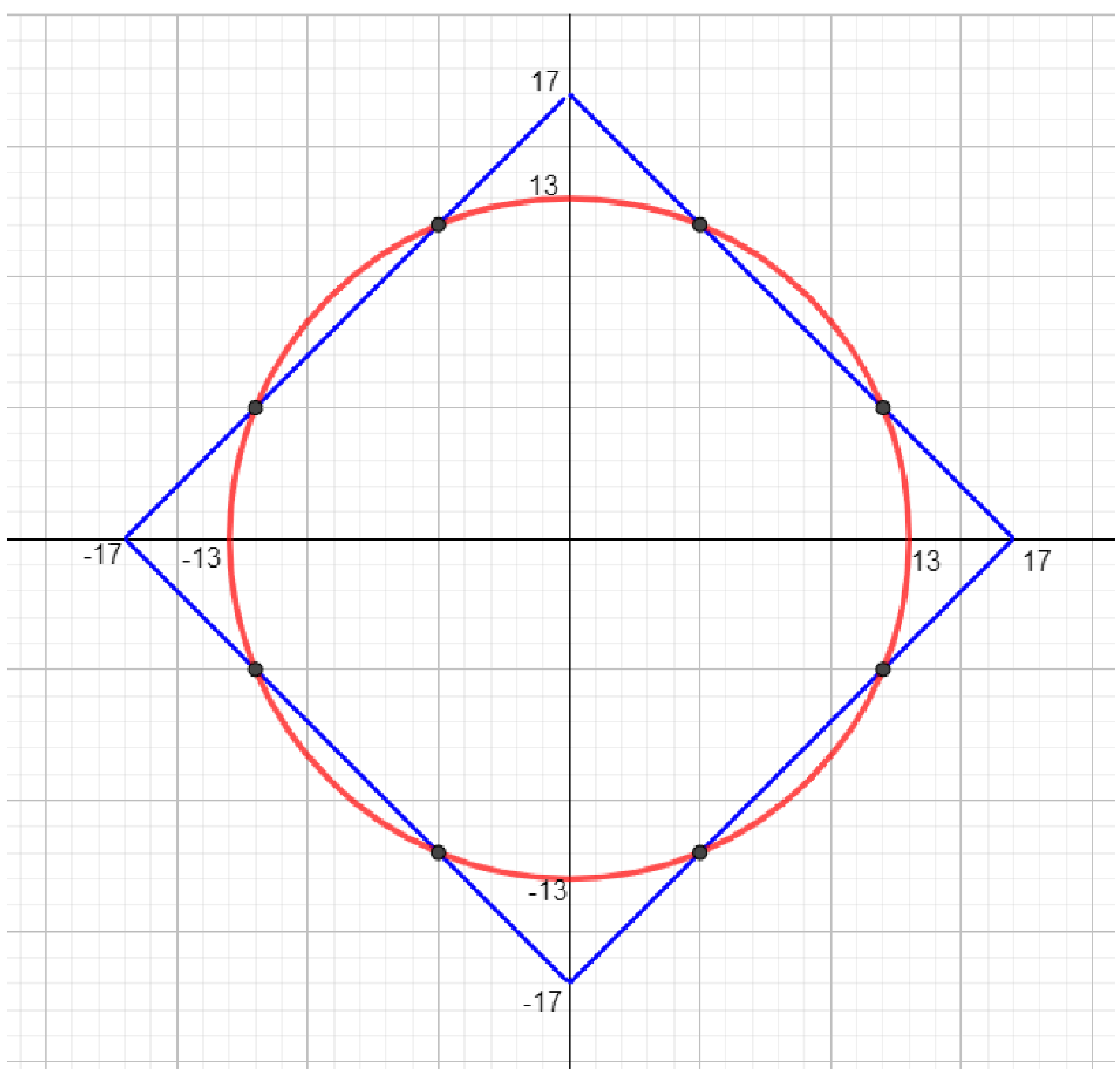
Решение Сравнивая $\sqrt{2}$ и $\sqrt[3]{3}$ возведем оба числа в 6 степень и получим числа 8 и 9. Второе число $\sqrt[3]{3}$ больше. Таким же образом, возводя в нужные степени и сравнивая его с остальными числами, получаем, что оно наибольшее. Например, $\sqrt[3]{3}$ и $\sqrt[5]{5}$ возводя в 15 степень, получаем числа $3^5 = 243$ и $5^3 = 125$. **Ответ:** $\sqrt[3]{3}$

5–задача

Сколько решений имеет система уравнений:

$|X| + |Y| = 17$; $X^2 + Y^2 = 169$?

Решение Можно построить графики этих уравнений. Это будут квадрат с вершинами в точках (17; 0), (0; 17), (–17; 0), (0; –17) и окружность радиуса 13 с центром в (0; 0).



Эти линии пересекаются в 8 точках: (±5; ±12) и (±12; ±5)

Ответ: 8

6–задача

Дано четырёхзначное число X с различными ненулевыми цифрами. Сумма всех чисел, полученных перестановкой цифр числа X равна 73326. Найдите произведение цифр числа X.

Решение Пусть a, b, c, d – цифры исходного четырёх–значного числа. Перестановкой этих цифр можно получить $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ числа. В этих числах цифра a 6 раз стоит первой, второй — 6 раз, третьей — 6 раз, четвёртой — 6 раз. Аналогично для цифр b, c, d. Так как

$6000a + 600a + 60a + 6a = 6666a;$

$6000b + 600b + 60b + 6b = 6666b;$

$6000c + 600c + 60c + 6c = 6666c;$

$6000d + 600d + 60d + 6d = 6666d,$

получим, что сумма этих 24 чисел равна

$6666a + 6666b + 6666c + 6666d = 6666(a + b + c + d).$

По условию, сумма равна 73326. Значит, $a + b + c + d = 11$. Так как цифры различны, то это могут быть только 1, 2, 3 и 5. Их произведение равно 30. **Ответ:** 30

7–задача

Найти сумму всех трёхзначных чисел, для которых, верно, следующее утверждение: *при вычеркивании цифры, стоящей в разряде сотен, получается число в 9 раз меньшее, чем исходное число*.

Решение Пусть $\overline{abc}$ – десятичная запись исходного числа, тогда $\overline{abc} = 100a + \overline{bc}$. Значит, $100a + \overline{bc} = 9\overline{bc} => 100a = 8\overline{bc} =>$ $=> 25a = 2\overline{bc}$. Так как 25 и 2 взаимно простые числа, то число $\overline{bc}$ должно делится на 25. Значит, $\overline{bc}$ или 25, или 50, или 75. Если $\overline{bc} = 25$, то $\overline{abc} = 225$. Если $\overline{bc} = 50$, то $\overline{abc} = 450$. Если $\overline{bc} = 75$, то $\overline{abc} = 675$. Поэтому, ответ: $225 + 450 + 675 = 1350$.

Ответ: 1350

8–задача

Москвина составила число

$$\frac{888888888 \cdot 888888888}{1+2+3+4+5+6+7+8+7+6+5+4+3+2+1},$$

а Мишин составил число

$$\frac{999999999\cdot 999999999}{1+2+3+4+5+6+7+8+9+8+7+6+5+4+3+2+1}.$$

На сколько число Москвиной меньше числа Мишина?

Решение Так как $1+2+3+4+5+6+7+8+7+6+5+4+3+2+1=64$ $=8^2$, число Москвиной равно 11111111^2. Таким же является и число Мишина. То есть, ответ 0. **Ответ**: 0

9–задача

Для того чтобы занять учеников на длительное время, учитель велел им вычислить произведение

$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{900}\right)$. Подскажите ученикам.

Решение Воспользуемся формулой разности квадратов и получим: $\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{900}\right)=$

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{30}\right)\left(1+\frac{1}{30}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\ldots\frac{28}{29}\cdot\frac{30}{29}\cdot\frac{29}{30}\cdot\frac{31}{30}=\frac{1}{2}\cdot\frac{31}{30}=\frac{31}{60}$$

Ответ: $\frac{31}{60}$

10–задача

Айдар говорит, что возраст его сыновей можно определить через функции $\sqrt{2x^2+6x+13}$ и $\sqrt{x^2+3x-2}$, а при отдельных значениях x разность значений этих функций дает возраст дочери — 3 года. Найдите сумму этих значений x.

а) 1/3 б) 3 в) 8 г) 9 д) –1 е) –6

Решение Обозначим $\sqrt{2x^2+6x+13}=a$; $\sqrt{x^2+3x-2}=b$. Тогда, $a^2-b^2=17$, и имеет место система уравнений: $a–b=3$; $a^2-b^2=17$. Отсюда, $a=b+3$ и, подставив во второе: $(b+3)^2-2b^2=17 <=> b^2-6b+8=0$. Корни этого уравнения: $b=2$ и $b=4$. Итак, для того чтобы закончить решение, нужно решить два уравнения. Первое уравнение: $\sqrt{x^2+3x-2}=2 <=> x^2+3x-2=4 <=> x^2+3x-6=0$.

Его корни: $x_1 = -1,5 - \sqrt{8,25}$; $x_2 = -1,5 + \sqrt{8,25}$.

Второе уравнение:

$$\sqrt{x^2 + 3x - 2} = 4 <=> x^2 + 3x - 2 = 16 <=> x^2 + 3x - 18 = 0.$$

Его корни: $x_3 = -1,5 - 4,5 = -6$; $x_4 = -1,5 + 4,5 = 3$.

Подставив найденные значения в исходное уравнение, убедимся в том, что они являются корнями. **Ответ**: –6

9 КЛАСС

1–задача

Пугачева через точку O провела 3 прямые и насчитала 6 углов, с вершиной в этой точке. А по Вашему мнению, сколько получилось углов с вершиной в этой точке?

Решение На каждом луче, начинающемся в точке O, выберем одну точку: A, B, C, D, E, F. В итоге, получится 15 углов: <AOB, <AOC, <AOD, <AOE, <AOF, <BOC, <BOD, <BOE, <BOF, <COD, <COE, <COF, <DOE, <DOF, <EOF.

Владеющие комбинаторикой могут прийти к этому ответу, вычислив $C(6; 2) = 15$. **Ответ:** 15

2–задача

Мальцев считает, что уравнение $X^2YZ = 2020$ имеет 8 целочисленных решений. А по Вашему мнению, сколько решений в целых числах имеет это уравнение?

Решение Разложим число 2020 на простые множители: $2020 = 2^2 \cdot 5 \cdot 101$. Значит, X может быть только ±1 или ±2.

Если $X = 2$, то $YZ = 505 = 101 \cdot 5 \cdot 1$, то есть Y и Z или оба положительные или оба отрицательные: (5; 101), (–5; –101), (1; 505), (–1; –505), (101; 5), (–101; –5), (505; 1), (–505; –1).

То же самое при $X = -2$. Здесь всего 16 решений.

Если $= \pm 1$, то $YZ = 2^2 \cdot 5 \cdot 101 \cdot 1$: еще 2 раза по 20 решений. Здесь 40 решений. Итак, всего 56 целочисленных решений уравнения. **Ответ:** 56

3–задача

Если x_0 является корнем уравнения $x^{10} + x^6 + x^2 = 1$, то, чему равно число $x_0^4 + x_0^2 - 1$?

Решение Из условия задачи $x^{10} + x^6 + x^2 = 1$ имеем $x_0^2 - 1 = -x_0^{10} - x_0^6$. Тогда, $x_0^4 + x_0^2 - 1 = x_0^4 - x_0^{10} - x_0^6 =$ $= x_0^4(1 - x_0^6 - x_0^2) = x_0^4(x_0^{10}) = x_0^{14}$

Ответ: x_0^{14}

4–задача

Макарова считает, что уравнение $20x^2 - 17x - 4xy + y + 63 = 0$ имеет 2 целочисленных решения. А по Вашему мнению, сколько решений в целых числах имеет это уравнение?

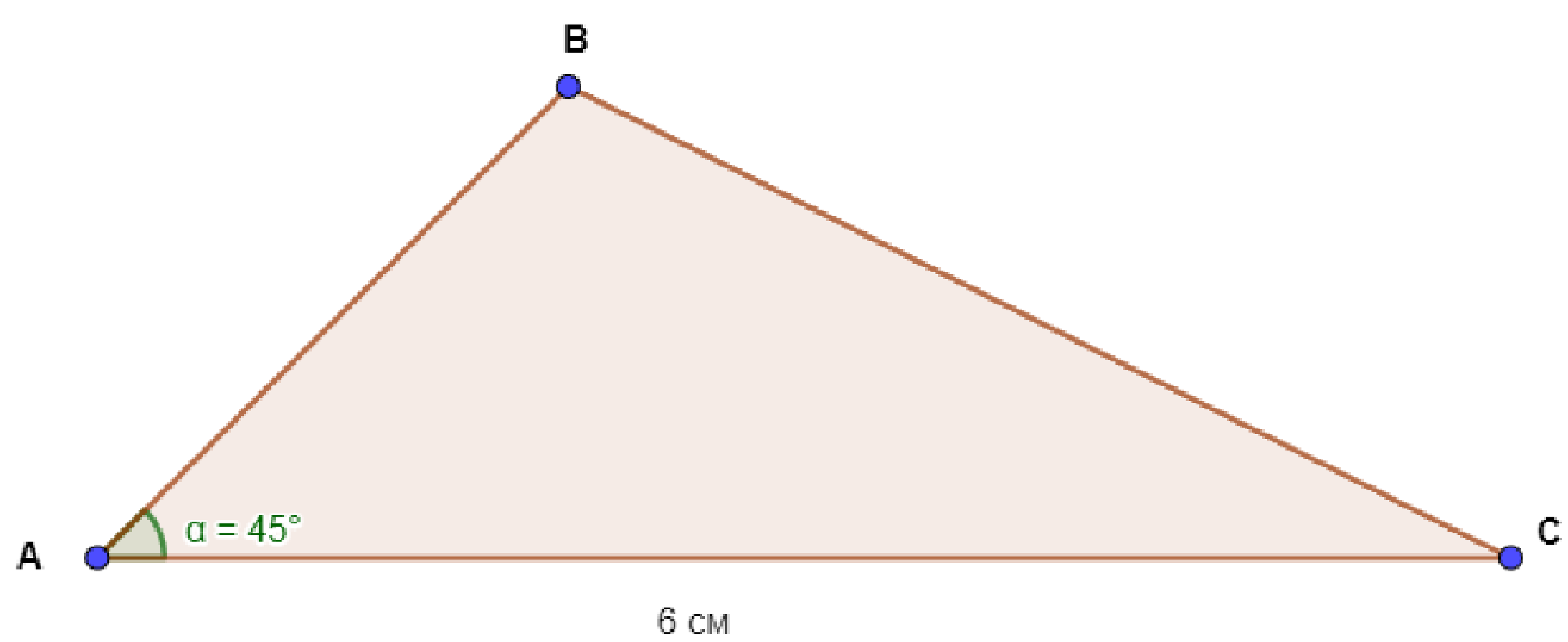
Решение Выразим y через x и разделим числитель на знаменатель: $20x^2 - 17x + 63 = 4xy - y$;

$(4x-1)y = 20x^2 - 17x + 63$; $y = \dfrac{20x^2 - 17x + 63}{4x-1} = 5x - 3 + \dfrac{60}{4x-1}$.

Для того, чтобы значения x и y были целыми, необходимо, чтобы ($4x - 1$) являлось нечетным делителем числа 60. Итак, достаточно рассмотреть значения ($4x - 1$) равные $\pm 1; \pm 3; \pm 5; \pm 15$. Далее, решаем соответствующие уравнения, отбираем целые корни и получаем решения: $(0;-63), (1;20), (-1;-20), (4;21)$ **Ответ:** 4 решения.

5–задача

Треугольник *ABC* имеет площадь 6 см^2. При этом длина *AB* равна 6 см, угол *BAC* равен 45º. Найдите тангенс угла *CBA*.



Решение

Ответ получится из формулы $S = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{k^2}{ctg\alpha + ctg\beta}$.

Здесь, k — сторона треугольника, α и β — величины прилегающих к k углов. **Ответ:** 0,5

6–задача

Найдите сумму всех действительных корней уравнения

$(x^2 - 2x - 1)^2 = x^3 + 33$.

Решение

Переписав уравнение в виде $(x^2 - 2x - 1)^2 - 25 - (x^3 + 8) = 0,$ и воспользовавшись формулами сокращенного умножения, получим $(x^2 - 2x - 1 - 5)(x^2 - 2x - 1 + 5) - (x + 2)(x^2 - 2x + 4) = 0.$ Следовательно, $(x^2 - 2x + 4)[(x^2 - 2x - 6 - (x + 2)] = 0.$

Так как уравнение $(x^2 - 2x + 4) = 0$ действительных корней не имеет, такими корнями исходного уравнения будут корни уравнения $x^2 - 3x - 8 = 0.$ По теореме Виета, сумма корней равна 3. **Ответ:** 3

7–задача

Пусть 5 является наибольшей цифрой четырёхзначного числа, кратного 5, в записи которого все цифры различны. Сколько существует таких чисел?

Решение Последняя цифра числа — это 0 или 5 (по признаку делимости на 5). Разберем оба случая.

1) Если последняя цифра 5, то остаются цифры *0, 1, 2, 3, 4*. Первая цифра не 0. Значит, для неё существует 4 варианта выбора. Вторая цифра может равняться 0, но не может равняться первой цифре. Для неё есть 4 варианта выбора.

Для третьей цифры остается 3 варианта.

Получается, $4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 1 = 48$ вариантов

2) Если последняя цифра 0, то остаются цифры *1, 2, 3, 4, 5*. Одна из цифр 5. Для этого есть 3 варианта выбора.

На остальные два места остаются цифры *1, 2, 3, 4*. Так как цифры должны быть разные, то существует $4 \cdot 3$ варианта. Получается, $1 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 3 = 36$ вариантов.

Всего 48 + 36 = 84 числа. **Ответ:** 84

8–задача

В городе Матеран дома нумеруются особым образом. Так, на улице Айтаман дома последовательно занумерованы числами

291, 303, 309, 321, 327, a, b, c, d, e, f, 420, 426, … Определите, какие числа обозначены буквами *a, b, c, d, e, f,* и найдите их сумму $a + b + c + d + e + f$.

Решение Каждый член ряда, начиная со второго равен сумме предыдущего члена и суммы его цифр. Значит,

$a = 339,\ b = 354,\ c = 366,\ d = 381,\ e = 393,\ f = 408.$

Поэтому, $a + b + c + d + e + f = 2241.$ **Ответ:** 2241

9–задача

Онегин утверждает, что внутри круга радиуса 3 лежат три точки, координаты которых удовлетворяют уравнению

$x^2 + 4x\cos(x(2y + \pi)) + 4 = 0$. Сколько таких точек по Вашему мнению?

Решение Обозначим $\cos(x(2y + \pi))$ через p. С одной стороны, абсолютное значение p не превосходит 1. С другой, для приведенного квадратного уравнения $x^2 + 4xp + 4 = 0$ дискриминант $(2p)^2 - 4$ отрицателен для всех p меньших по абсолютной величине, чем 1. Таким образом, возможны только два вида решений: $p = 1$, и, как следствие, $x = -2$; $p = -1$, и, как следствие, $x = 2$.

Итак, $\begin{cases} x = -2; \\ \cos(-2(2y + \pi)) = 1; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2; \\ y = \pi k / 2; \end{cases}$ а также,

$\begin{cases} x = 2; \\ \cos(2(2y + \pi)) = -1; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2; \\ y = \pi / 4 + \pi m / 2. \end{cases}$ Здесь $k,\ m$ — любые целые числа. Отсюда ответ: три точки из первого и две точки из второго набора лежат в заданном круге.

Ответ: 5

10–задача

Имеются три раствора соли *A, B* и *C*, отличающиеся друг от друга только концентрацией. Смешав 300 г *A* с 450 г *B* и 750 г *C* получили 54,7%–ный раствор. Затем, смешав 100 г *A* с 40 г *B* и 60 г *C* получили 47,4%–ный раствор. И наконец, смешав 150 г *A* с 250 г *B* и 100 г *C* получили 46,9%–ный раствор. Определите, какой будет концентрация соли (в %), если смешать 200 г *A* с 500 г *B* и 300 г *C*.

Решение Использовав соответствующие обозначения, получим систему: $\begin{cases} 300a + 450b + 750c = (300 + 450 + 750)0{,}547; \\ 100a + 40b + 60c = (100 + 40 + 60)0{,}474; \\ 150a + 250b + 100c = (150 + 250 + 100)0{,}469. \end{cases}$

Для того чтобы решить эту систему можно воспользоваться стандартными методами решения систем линейных алгебраических уравнений. В то же время, специфика данной системы позволяет решить ее относительно просто. Для этого, умножим/разделим каждое уравнение системы на число, которое превратит выражение в скобках в 1000. Итак, разделим первое уравнение на 1,5, умножим второе на 5, умножим третье на 2. В итоге, получим

$\begin{cases} 200a + 300b + 500c = 547; \\ 500a + 200b + 300c = 474; \\ 300a + 500b + 200c = 469. \end{cases}$ Сумма уравнений полученной системы: $1000a + 1000b + 1000c = 1490$, и отсюда $100a + 100b + 100c = 149$. Умножим это уравнение на 5 и из результата вычтем первое уравнение системы.

Далее, из второго уравнения системы вычтем уравнение $100a + 100b + 100c = 149$ умноженное на 3. Тогда, получится система: $\begin{cases} 300a + 200b = 198; \\ 200a - 100b = 27, \end{cases}$ с решением $a = 0{,}36$; $b = 0{,}45$.

Подставив эти значения в равенство $a + b + c = 1{,}49$, получим $c = 0{,}68$. Для того чтобы закончить решение задачи осталось вычислить значение выражения $200a + 500b + 300c$ при найденных значениях: $200 \cdot 0{,}36 + 500 \cdot 0{,}45 + 300 \cdot 0{,}68 = 501$.

Итак, выяснилось, что в: $200 + 500 + 300 = 1000$ граммах раствора содержится 501 г соли, то есть концентрация соли равна 50,1%. **Ответ:** 50,1%

10 КЛАСС

1–задача

На экзамене необходимо ответить на 40 вопросов. Каждый правильный ответ вознаграждается 5 баллами, но за неправильные ответы вычитается 2 балла, а те, которые не решались и остались без ответа, оцениваются в 0 баллов. Сколько правильных ответов получила ученица, оставившая без ответа в два раза больше вопросов, чем количество её неправильных ответов, и в итоге набрала 98 баллов?

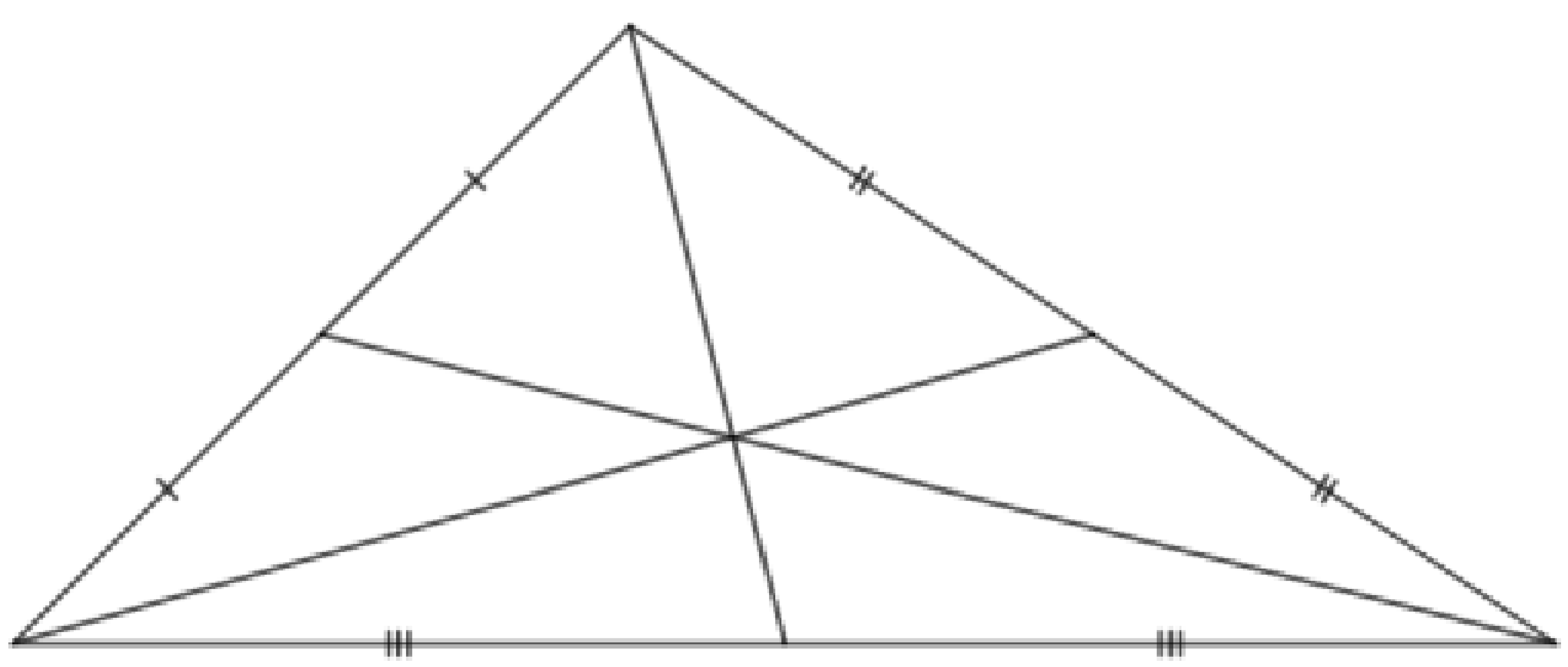
Решение Пусть x – количество правильных ответов, y — неправильных и z — вопросов, оставшихся без ответов. Тогда, $x + y + z = 40$, а из условия на сумму баллов: $5x + (-2)y + 0z = 98$. Также известно, что количество вопросов без ответа в два раза больше вопросов с неправильными ответами: $z = 2y$. Таким образом:

$$\begin{cases} x + y + z = 40, \\ 5x - 2y = 98, \\ z = 2y, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 3y = 40, \\ 5x - 2y = 98, \\ z = 2y, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 22, \\ y = 6, \\ z = 12. \end{cases}$$

Ответ: 22 правильных ответа.

2–задача

Иванов в треугольнике, нарисованном Петровым, провел три медианы. Сколько получилось новых треугольников?



Решение Эти медианы делят треугольник на 6 маленьких треугольников. Каждые два маленьких треугольника, примыкающие к стороне исходного треугольника дают еще треугольник — таких 3. И каждая медиана делит исходный треугольник на 2 — еще 6 треугольников.

Всего: $6 + 3 + 6 = 15$ новых треугольников. **Ответ:** 15

3–задача

М. Казаков провел окружность через все точки пересечения графиков уравнений $y = x^2 + 3x - 16$ и $x = y^2 - 3y - 65$ Чему равен радиус этой окружности.

Решение

Сложив два уравнения, получим: $x+y=x^2+3x-16+y^2-3y-65 \Rightarrow$ $x^2+2x+y^2-4y-81=0 \Rightarrow x^2+2x+1+y^2-4y+4=86 \Rightarrow$ $(x+1)^2+(y-2)^2=86$.

Любая пара $(x;\ y)$, являющаяся решением каждого из данных уравнений, является и решением полученного. Значит, все общие точки графиков этих уравнений лежат на окружности радиуса $\sqrt{86}$ с центром в точке $(-1;\ 2)$. **Ответ:** $\sqrt{86}$

4–задача

Галкин получит приз, если определит при каком значении выражения $x+y+z$, будет достигнуто наибольшее значение выражения $-100x+12y+120z-20x^2-18y^2-75z^2-104$

Помогите Галкину.

Решение $-100x+12y+120z-20x^2-18y^2-75z^2-104=$

$-20x^2-100x-18y^2+12y-75z^2+120z-104=$

$-20(x^2+5x)-18(y^2-\frac{2}{3}y)-75(z^2-1{,}6z)-104=$

$-20(x^2+5x+2{,}5^2)-18(y^2-\frac{2}{3}y+\left(\frac{1}{3}\right)^2)-75(z^2-1{,}6z+0{,}8^2)-$

$104+20(2{,}5^2)+18\left(\frac{1}{3}\right)^2+75(0{,}8^2)=$

$-20(x+2{,}5)^2-18(y-\left(\frac{1}{3}\right))^2-75(z-0{,}8)^2+71\cdot$

Так как все коэффициенты при квадратах отрицательные, выражение примет наибольшее возможное значение 71, когда каждый квадрат будет равен нулю.

Значит, $x=-2{,}5;\quad y=\frac{1}{3};\quad z=0{,}8\cdot$ Соответственно,

$x+y+z=$ $-2{,}5+\frac{1}{3}+0{,}8=-\frac{41}{30}\cdot$ **Ответ:** $-\frac{41}{30}$

5–задача

Исходя из того, что $\dfrac{a^2-35b^2}{ab}=-2$, Алсу считает, что значения выражения $\dfrac{a^2+35b^2}{ab}$ равны ± 15. А по Вашему мнению, чему равно это выражение?

Решение Разделим числитель и знаменатель данной дроби на b^2: $\dfrac{(a/b)^2-35}{a/b}=-2$. Обозначив $x = a/b$, получим $\dfrac{x^2-35}{x}=-2$.

Тогда: $x^2-35+2x=0 \Rightarrow x_1=-7;\ x_2=5.$

При $x=-7$, получим $\dfrac{x^2+35}{x}=\dfrac{49+35}{-7}=-12$.

При $x=5$, получим $\dfrac{x^2+35}{x}=\dfrac{25+35}{5}=12$. **Ответ:** ± 12

6–задача

Оля утверждает, что уравнение $cos^2x+cos^2 2x+cos^2 3x=1$ имеет 5 корней, не превосходящих 2 по модулю. Сколько таких корней по Вашему мнению?

Решение Применяя формулы $cos^2 x=\dfrac{1+cos2x}{2}$; $cos^2 2x=\dfrac{1+cos4x}{2}$, имеем $cos2x+cos4x+2cos^2 3x=0$. Далее, по формуле для суммы косинусов $cos2x + cos4x = 2cos3xcosx$. Таким образом, $2cos3xcosx + 2cos^2 3x = 0 \Rightarrow$ $2cos3x(cosx + cos3x) = 0 \Rightarrow 4cos3x\cdot cos2x\cdot cosx = 0.$ Решениями уравнения являются

$x_1=\dfrac{\pi}{2}+\pi k,\ x_2=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi k}{2},\ x_3=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi k}{3},\ k\in Z$ **Ответ:** 6

7–задача

Каждая ячейка таблицы 29 × 29 содержит одно из чисел 17, 19, 21,. . . , 73, и каждое из этих целых чисел встречается 29 раз. Сумма всех чисел над главной диагональю в два раза больше суммы всех чисел под этой диагональю. Определите число в центральной ячейке таблицы.

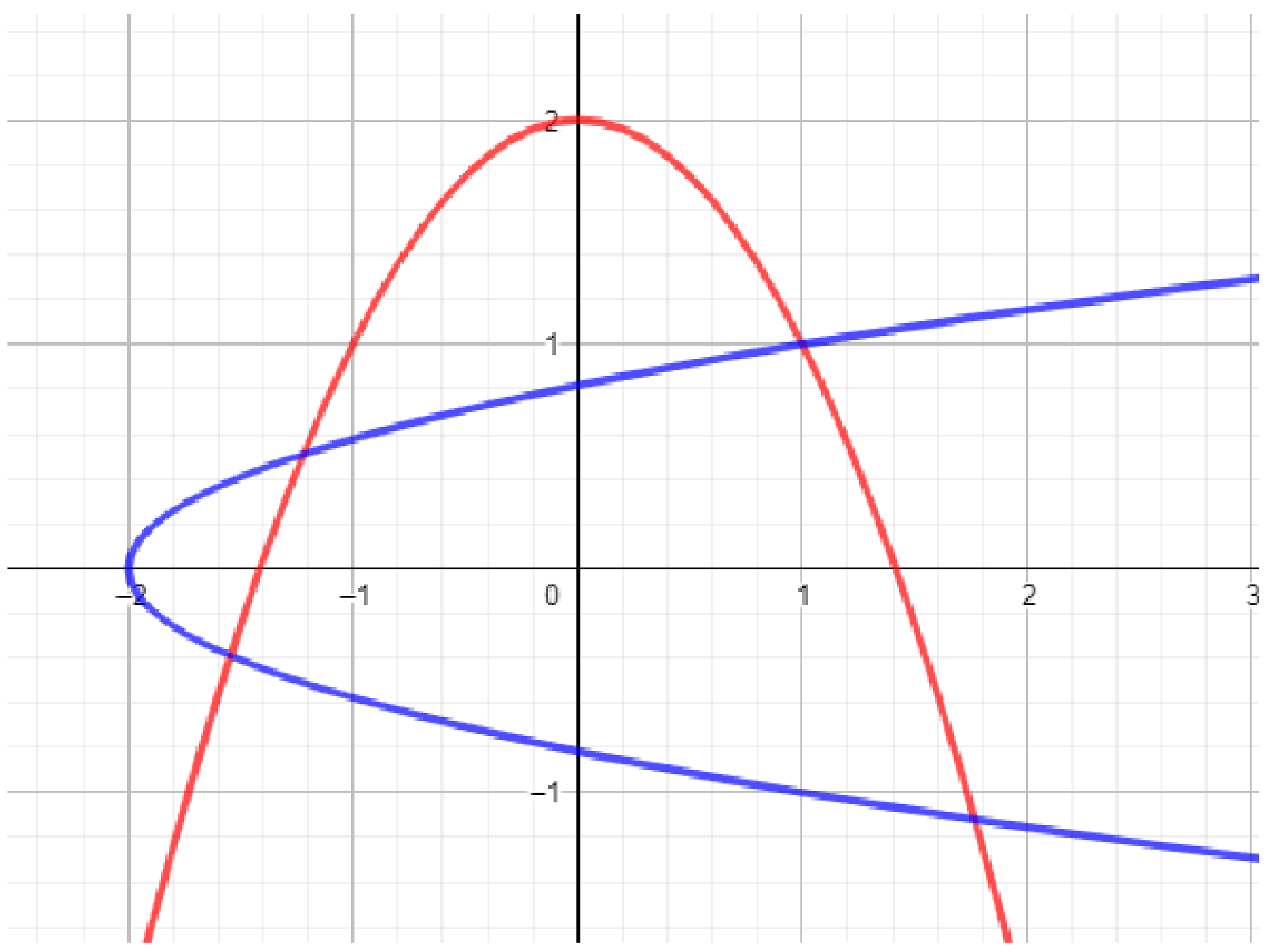
Решение На главной диагонали 29 чисел, над ней 29×14 чисел и под ней 29×14 чисел. Сумма наибольших 29×14 чисел равна $29(47 + 49 + \cdots + 73) = 29 \cdot 7 \cdot 120$, а сумма наименьших 29×14 чисел равна $29(17 + 19 + \cdots + 43) = 29 \cdot 7 \cdot 60$. Поскольку первое значение должно быть в два раза больше второго, оказывается, что все самые большие числа из 29 × 29 исходных чисел будут над главной диагональю, а все наименьшие числа находятся под главной диагональю. Таким образом каждое число на главной диагонали, включая центральную клетку, равно 45. **Ответ:** 45

8–задача

Загитова считает, что система $\begin{cases} x^2 + y = 2; \\ x - 3y^2 = -2 \end{cases}$ имеет 2 решения.

А, по Вашему мнению, сколько решений $(x; y)$ имеет система?

Решение Можно построить графики этих уравнений. Это будут вертикальная парабола (ветви вниз) с вершиной в точке (0; 2) и горизонтальная парабола (ветви вправо) с вершиной в точке (– 2; 0).



Эти линии пересекаются в 4 точках.

Ответ: 4.

9–задача

А. Алиев старается понять, при каких значениях m и k уравнению $x^2 + 2mx + k = 0$ удовлетворяют корни $2m$ и $m + k$. Помогите е му найти $m - k$.

Решение Согласно теореме Виета: $\begin{cases} 2m+(m+k)=-2m; \\ 2m(m+k)=k. \end{cases}$

Отсюда получаем два решения: $(0;\ 0)$ и $(0,625;\ -3,125)$.
Тогда $m-k=3,75$. **Ответ:** *3,75*

10–задача

Сидоров купил участок земли в форме трапеции, основание которой равно 7 см, длина отрезка, который параллелен основанию, проходит через точку пересечения диагоналей и заключен между боковыми сторонами трапеции, равна 4,2 см. Чему равна длина второго основания трапеции.

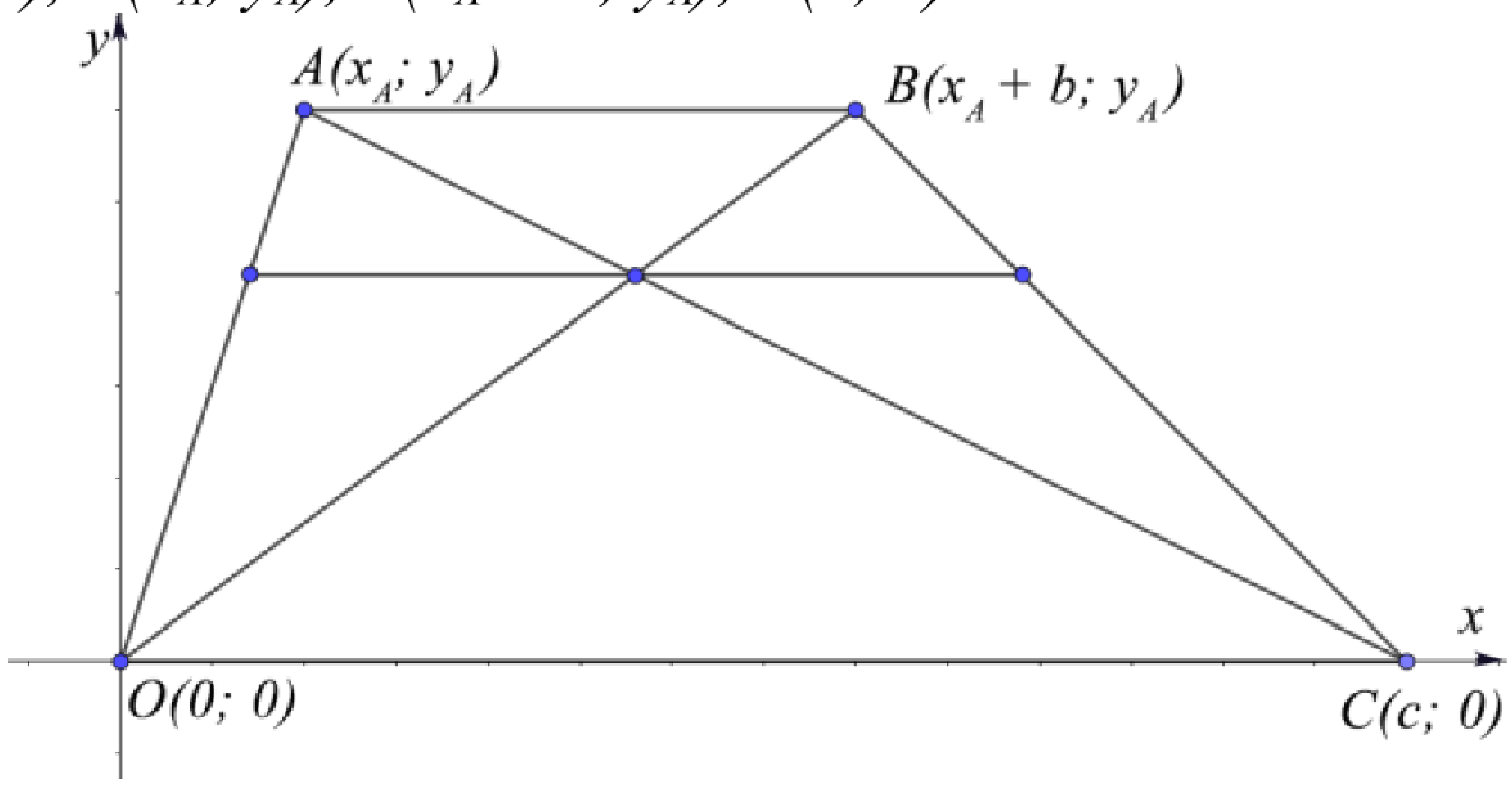
Решение Ответ получается из общего утверждения, которое будет доказано далее.

Теорема

Если трапеция имеет основания b и c, то длина отрезка, который параллелен основанию, проходит через точку пересечения диагоналей и заключен между боковыми сторонами трапеции, равна $\dfrac{2bc}{b+c}$.

Доказательство

Рассмотрим трапецию OABC, с вершинами в точках $O(0;\ 0)$, $A(x_A;\ y_A)$, $B(x_A+b;\ y_A)$, $C(c;\ 0)$.



Уравнение диагонали AC: $y=\dfrac{y_A}{x_A+b}x$; диагонали OB:

$y=\dfrac{y_A}{x_A-c}x-\dfrac{cy_A}{x_A-c}$. Поэтому, решив систему из этих уравнений, получим координаты точки пересечения диагоналей: $\left(\frac{c(x_A+b)}{c+b}; \frac{cy_A}{c+b}\right)$. Таким образом, искомый отрезок является частью прямой $y=\frac{cy_A}{c+b}$. Координаты концов отрезка определяются пересечениями этой прямой с уравнениями прямых, на которых лежат боковые стороны трапеции. Уравнения боковых сторон можно написать, использовав координаты вершин трапеции. Итак, боковая сторона OA имеет уравнение $y=\frac{y_A}{x_A}x$, а сторона BC — уравнение $y=\frac{y_A}{x_A+b-c}(x-c)$. Следовательно, координаты точки $\left(\frac{cx_A}{c+b}; \frac{cy_A}{c+b}\right)$, являющейся решением системы уравнений $y=\frac{cy_A}{c+b}$ и $y=\frac{y_A}{x_A}x$, определяют левый конец отрезка, а точки $\left(\frac{c(x_A+2b)}{c+b}; \frac{cy_A}{c+b}\right)$, являющейся решением системы уравнений $y=\frac{cy_A}{c+b}$ и $y=\frac{y_A}{x_A+b-c}(x-c)$, определяют правый конец отрезка.

Понятно, что длина отрезка, заключенного между точками $\left(\frac{cx_A}{c+b}; \frac{cy_A}{c+b}\right)$ и $\left(\frac{c(x_A+2b)}{c+b}; \frac{cy_A}{c+b}\right)$ равна $\frac{2bc}{b+c}$. Что и требовалось доказать. **Ответ:** 3

11 КЛАСС

1–задача

Средний возраст студентов группы был равен их количеству. Это интересное свойство сохранилось и после того, как 23–

летний студент выбыл из группы. Сколько студентов сейчас в группе?

Решение Пусть x это сумма возрастов всех студентов, а n — количество студентов в группе, тогда по условию задачи верно следующее: $x/n = n$. После выбывания одного студента, количество студентов стало $n–1$, а сумма их возрастов уменьшилась на 23, то есть стало $x–23$. Тогда: $(x–23)/(n–1) = =n - 1$. Из первого уравнения: $x = n^2$. Тогда, из второго уравнения: $(n^2 - 23)/(n - 1) = n - 1 => n^2 - 23 = (n - 1)^2 => n^2 - 23 = n^2 -2n+1 => 2n - 24 = 0 => n = 12$. Так как один студент выбыл, то сейчас в группе: $12 - 1 = 11$ студентов.

Ответ: 11

2–задача

Медведев, зная, что $\left(\frac{20}{21}\right)^{\log_{2021}x} = \left(\frac{21}{20}\right)^{\frac{1}{\log_y 2021}}$ собирается вычислить числовое значение выражения ($xy + 1956$). Помогите ему.

Решение По свойству степеней

$$\left(\frac{20}{21}\right)^{\log_{2021}x} = \left(\frac{21}{20}\right)^{-\log_{2021}x} \quad \text{и} \quad \left(\frac{21}{20}\right)^{\frac{1}{\log_y 2021}} = \left(\frac{21}{20}\right)^{\log_{2021}y}.$$

Значит $x^{-1} = y$ и $xy = 1$. Отсюда $xy + 1956 = 1957$.

Ответ: 1957.

3–задача

Сергеев разрезал деревянный куб с ребром 2 дм через середину большой диагонали, плоскостью перпендикулярной к ней. Затем он покрасил полученные фигуры. Сколько грамм краски было израсходовано, если на 1 дм^2 тратится 20 г краски.

Решение Сечением является правильный шестиугольник, состоящий из 6 правильных треугольников. Площадь правильного треугольника со стороной x равна $x^2\sqrt{3}/4$, тогда площадь шестиугольника равна $6x^2\sqrt{3}/4$. Когда сечение пересекает грань куба, то получается отрезок, соединяющий середины соседних сторон куба и его длина $x = \sqrt{2}$. Значит, площадь сечения равна $6(\sqrt{2})^2\sqrt{3}/4 = 3\sqrt{3}$. В результате разреза получаются две фигуры, общая поверхность которых есть поверхность куба плюс два сечения. Тогда, получается, что была окрашена поверхность площадью $6\cdot 2^2 + 2\cdot 3\sqrt{3} =$ $= 24 + 6\sqrt{3}$. Соответственно, было истрачено $20(24 + 6\sqrt{3}) \approx 688$ г краски. **Ответ:** 68,8

4–задача

В выражении 11 : 31 : 61 : 71 : 101 : 131 : 151 : 181 Арген расставил скобки всеми возможными способами. Сколько различных числовых значений получил Арген?

Решение При любой расстановке скобок данное выражение можно представить в виде дроби. Так как все данные числа являются простыми, то результат вычислений будет однозначно определяться тем, куда «попало» каждое из этих чисел, в числитель или знаменатель. Независимо от расстановки скобок 11 будет в числителе, а 31 – в знаменатель. Каждое из следующих чисел может «попасть» как в числитель, так и в знаменатель. Таким образом, количество чисел, которые могут являться значением данного выражения при всех возможных расстановках скобок, равно $2^6 = 64$. **Ответ:** 64

5–задача

Найти наибольшее значение выражения $40x + 18y – 120z$, если $25x^2 + 4y^2 + 100z^2 = 121$.

Решение Приняв во внимание формулы длины вектора и скалярного произведения, рассмотрим векторы $\vec{a}(5x;\ 2y;\ 10z)$ и $\vec{b}(8;\ 9;\ -12)$ такие, что $(\vec{a};\vec{b}) = 40x + 18y - 120z$. Тогда $|\vec{a}| = \sqrt{25x^2 + 4y^2 + 100z^2} = 11,\qquad |\vec{b}| = \sqrt{8^2 + 9^2 + (-12)^2} = 17$.

Известно, что $(\vec{a};\vec{b}) \le |\vec{a}||\vec{b}|$. Поэтому, максимум:

$(\vec{a};\vec{b}) = 40x + 18y - 120z = |\vec{a}||\vec{b}| = 11\cdot 17 = 187$. **Ответ:** 187

6–задача

Семь самураев съели 147 порций риса. При этом, количества порций, съеденных самураями, составило арифметическую прогрессию. Так как второй и пятый самурай оказались родственниками хозяина гостиницы, самураи заплатили только за 110 порций, съеденных остальными. Сколько порций риса съел шестой самурай?

Решение Число порций, съеденных четвертым (медианным) самураем: $147:7 = 21;$ 2–м и 5–м самураями: $147 - 110 = 37$. Так как имеет место арифметическая прогрессия: $a_n = a_0 + nd$. Следовательно,

$$\begin{cases} a_0 + 4d = 21; \\ (a_0 + 2d) + (a_0 + 5d) = 37; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a_0 + 8d = 42; \\ 2a_0 + 7d = 37; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 5; \\ a_0 = 1. \end{cases}$$

Выяснилось, что 6–й самурай съел: $a_6 = a_0 + 6d = 1 + 6 \cdot 5 = 31$ порцию риса. **Ответ:** 31

7–задача

Краснов хочет решить систему $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 12; \\ xy + yz + xz = 12. \end{cases}$ и найти значение $x^4 + 2y^2 + \sqrt{8z}$. Помогите ему.

Решение Умножим каждое уравнение системы на 2 и вычтем второе уравнение из первого. Полученное уравнение запишем в виде: $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - (2xy + 2yz + 2xz) = 0 <=>$

$<=> (x^2 - 2xy + y^2) + (y^2 - 2yz + z^2) + (x^2 - 2xz + z^2) = 0 <=>$

$<=> (x - y)^2 + (y - z)^2 + (x - z)^2 = 0$. Сумма квадратов равна нулю только в том случае, если каждый квадрат равен нулю. Следовательно,

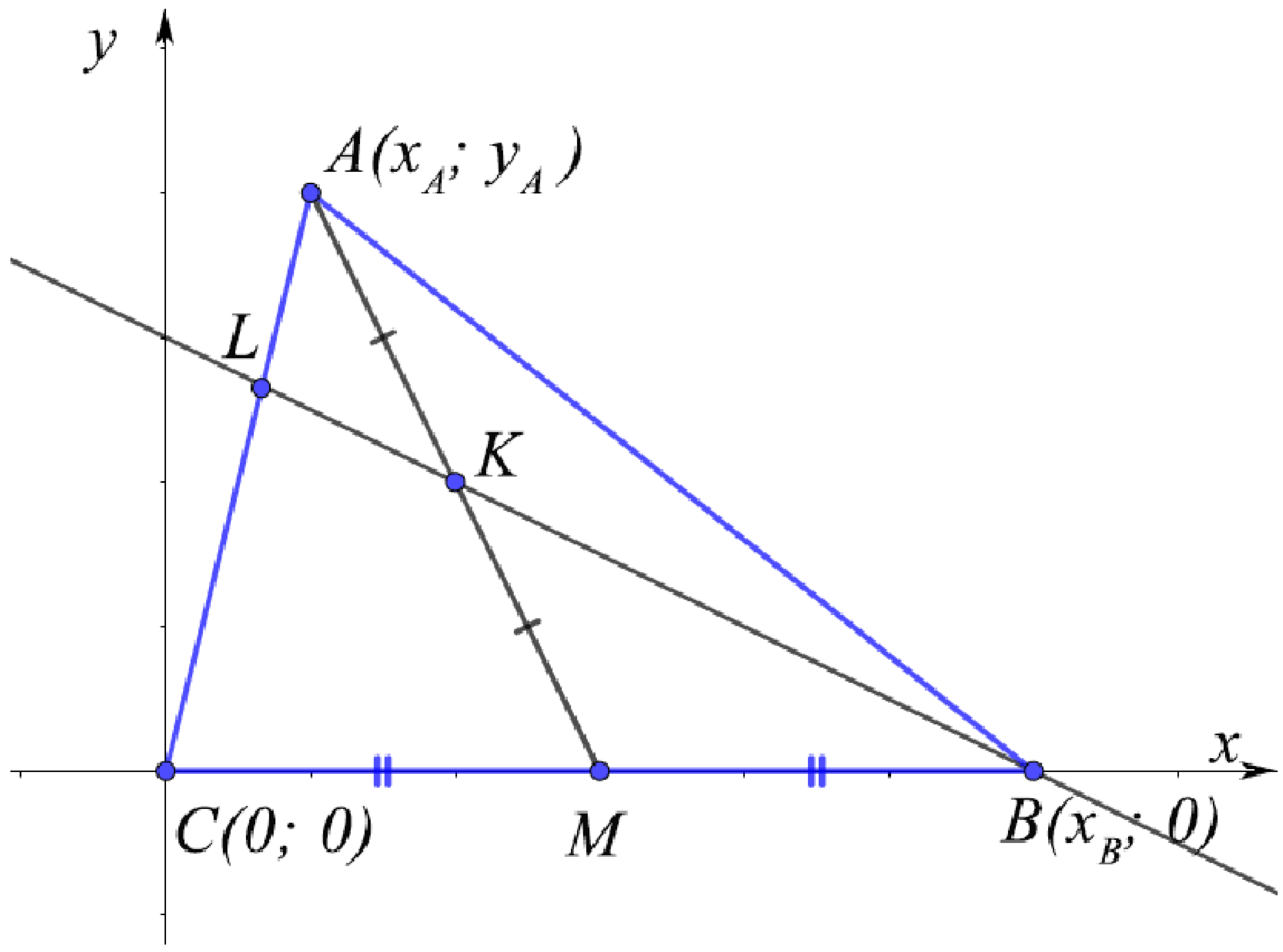
$(x - y) = 0;\ (y - z) = 0;\ (x - z) = 0 <=> x = y = z$.

Тогда, из первого уравнения исходной системы $3x^2 = 12 <=>$ $<=> x^2 = 4$. Таким образом, система имеет два решения: $(2; 2; 2)$ и $(-2; -2; -2)$. Использовав первое решение, получим, что значение $x^4 + 2y^2 + \sqrt{8z}$ равно 28. **Ответ**: 28

8–задача

В треугольнике ABC, с площадью S, проведена медиана AM. Точка K — середина AM. Прямая BK пересекает AC в точке L. Найти площадь треугольника AKL.

Решение Рассмотрим треугольник с вершинами в точках $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; 0)$, $C(0; 0)$.



Тогда, известны координаты $M(0{,}5x_B;\ 0)$. Известно, что координаты середины отрезка это полусумма координат его концов. Поэтому, $K(0{,}5x_A + 0{,}25\,x_B;\ 0{,}5y_A)$. Так как известны координаты двух точек на прямых, можно выписать уравнения прямой CA: $y = (y_A/x_A)x$ и прямой BK: $y = \dfrac{y_A}{x_A - 1{,}5x_B}x - \dfrac{x_B y_A}{x_A - 1{,}5x_B}$. Далее, решим систему $\begin{cases} y = \dfrac{y_A}{x_A}x; \\ y = \dfrac{y_A}{x_A - 1{,}5x_B}x - \dfrac{x_B y_A}{x_A - 1{,}5x_B} \end{cases}$ и получим координаты точки их пересечения — координаты точки L. Итак, $L\left(\dfrac{2x_A}{3};\ \dfrac{2y_A}{3}\right)$.

Таким образом, нам известны координаты всех вершин треугольника AKL. Использовав их, получим площадь: $\dfrac{1}{24}x_B y_A$. Приняв во внимание то, что площадь исходного треугольника ABC равна $\dfrac{1}{2}x_B y_A$ и S, по условию, получим, что площадь треугольника AKL равна $S/12$. **Ответ:** $S/12$.

9–задача

Руководство фирмы «Прогресс» в честь очередного юбилея решило премировать своих сотрудников. В итоге, 77 сотрудников получили по 1 тысяче сомов, 76 — по 2 тысячи, 75 — по 3 тысячи, … , 2 — по 76 тысяч и один получил 77 тысяч. Сколько тысяч сомов было выделено на эти премии?

Решение Задачу можно в общем виде, переформулировав следующим образом: найти сумму всех элементов числовой таблицы

1	1	1	1	…	1	1
2	2	2	2	…	2	0
3	3	3	3	…	0	0
…	…	…	…	…	…	…
$n-1$	$n-1$	0	0	…	0	0
n	0	0	0	…	0	0

В первом столбце имеет место сумма членов простейшей арифметической прогрессии, то есть $\frac{n+1}{2}n$;

во втором столбце: $\frac{n}{2}(n-1)$; в третьем столбце: $\frac{n-1}{2}(n-2)$;

… ; в предпоследнем столбце: $\frac{1+2}{2}\cdot 2$; в последнем, n–том столбце: $\frac{1+1}{2}\cdot 1$. Поэтому, просуммировав все столбцы, получим: $S=\frac{(n+1)n}{2}+\frac{n(n-1)}{2}+\frac{(n-1)(n-2)}{2}+\ldots+\frac{3\cdot 2}{2}+\frac{2\cdot 1}{2}=$

$=\frac{1}{2}\left[n^2+n+(n-1)^2+(n-1)+(n-2)^2+(n-2)+\ldots+2^2+2+1^2+1\right]$.

Перегруппируем слагаемые:

$$S=\frac{1}{2}\left[n^2+(n-1)^2+(n-2)^2+\ldots+2^2+1^2\right]+\frac{1}{2}\left[n+(n-1)+(n-2)+\ldots+2+1\right]$$

Внутри скобок стоят сумма квадратов последовательных натуральных чисел и просто сумма последовательных натуральных чисел. Поэтому, воспользовавшись соответствующими формулами, получим

$$S = \frac{1}{2}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{(n+1)n}{2}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{n(n+1)\{(2n+1)+3\}}{6}\right] =$$

$= \dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}$. Для того чтобы получить ответ, осталось подставить значение 77 в полученную формулу: $S(77) = \dfrac{77(77+1)(77+2)}{6} = 79079$. **Ответ:** 79079

10–задача

Машинист поезда, который двигался с постоянной скоростью, взглянув на счетчик пройденных километров, увидел двузначное число. Через час он увидел двузначное число, в котором предыдущие цифры поменялись местами. Еще через три часа он увидел трехзначное число, в котором между цифрами исходного числа появилась цифра 0. С какой скоростью шел поезд?

Решение Обозначив скорость через v, а исходное число $10x + y$, где x и y — цифры, получим систему уравнений: $10y + x - (10x + y) = 1 \cdot v;\ 100x + y - (10x + y) = 4 \cdot v$. Отсюда, $9y - 9x = 1 \cdot v;\ 90x = 4 \cdot v$. Поэтому, $90x = 4(9y - 9x)$. Таким образом, имеет место равенство $y = 3{,}5x$. Так как x и y являются цифрами, возможны только два решения: $x = 0;\ y = 0$ и $x = 2;\ y = 7$. Первая пара возможна только в том случае, если поезд стоит на месте. Следовательно, $x = 2;\ y = 7$, а скорость поезда: $v = 9y - 9x = 45$ *км/ч*. **Ответ:** 45

2021–2022. ВТОРОЙ ТУР. РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

9 КЛАСС

1–задача

Атыркуль 10 раз выстрелила по стандартной мишени и выбила 90 очков. Сколько попаданий было в семерку, восьмерку и девятку, если десяток было четыре, а других попаданий и промахов не было?

Решение Так как за 4 попадания в десятку было набрано 40 очков, то оставшимися шестью попаданиями в 7; 8 и 9 было выбито: $90 – 40 = 50$ очков. Обозначим количество попаданий в семерку через x, в восьмерку — y, в девятку — z. Тогда:

$$\begin{cases} 7x+8y+9z=50, \\ x+y+z=6, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7x+8y+9z=50, \\ 7x+7y+7z=42, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7x+8y+9z=50, \\ y+2z=8. \end{cases}$$

Тогда, $y = 8 – 2z \Rightarrow 7x + 8(8 – 2z) + 9z = 50 \Rightarrow z = x + 2$.
Следовательно, $y = 8 – 2(x +2) = 8 – 2x – 4 = 4 – 2x$. Отсюда, так как x и y — натуральные числа, x может быть равен только $0; 1; 2$. Тогда, $y_1= 4–2\cdot0= 4, y_2= 4– 2\cdot1=2, y_3= 4–2\cdot2=0,$
$z_1 = 0 + 2 = 2; z_2 = 1 + 2 = 3; z_3 = 2 + 2 = 4.$

Ответ: Итак, есть три варианта распределения попаданий в семерку, в восьмерку и в девятку: (0; 4; 2), (1; 2; 3), (2; 0; 4).

2–задача

Группу туристов решили рассадить по автобусам так, чтобы в каждом автобусе было одинаковое количество пассажиров. Сначала в каждый автобус сажали по 22 человека, однако оказалось, что при этом один турист лишний. Когда же один автобус уехал пустым, то в оставшиеся автобусы все туристы сели поровну. Сколько было первоначально автобусов и сколько туристов было в группе, если известно, что в каждый автобус помещается не более 32 пассажиров.

Решение Пусть x – количество автобусов, а y — количество пассажиров в одном автобусе после второй рассадки. Тогда количество пассажиров будет: $22x + 1$ или $y(x – 1)$. Таким образом имеет место уравнение: $22x + 1 = y(x – 1)$. Тогда,
$22x + 1 = y(x–1) \Rightarrow y = (22x + 1)/(x–1) \Rightarrow y = 22 + 23 / (x – 1)$.
Число $23/(x – 1)$ должно быть целым, неотрицательным.
23 — простое число и делится только на 1 и само на себя. Поэтому $x – 1 = 1$ или $x – 1 = 23$. Если $x – 1 = 1$, то $y = 45$ — туристов в одном автобусе. Это противоречит условиям задачи. Значит, количество автобусов $x – 1 = 23$, а первоначальное количество автобусов равно 24. Количество туристов: $22x + 1 = 22 \cdot 24 + 1 = 529.$

Ответ: 24 автобуса, 529 пассажиров.

3–задача

В журнале класса каждый из 33 учеников имеет порядковый номер. Все номера перемножили и получили число $X = 33! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot 33$. Сколькими нулями оканчивается число Х?

Решение Из множителей числа Х только шесть чисел делятся на *5*. Это: *5, 10, 15, 20, 25, 30*. Причем число 25 делится на 5 дважды. Поэтому, среди простых множителей числа Х число 5 встречается ровно 7 раз. Так как $5\cdot 2 = 10$, а двоек среди простых множителей числа Х больше семи: $8 = 2\cdot 2\cdot 2;$ $16 = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2; \ldots$, в конце числа Х стоят 7 нулей. **Ответ:** 7.

4–задача

Около треугольника со сторонами 2022, 2696, 3370 описана окружность. Найти радиус этой окружности.

Решение Заметив, что $2022=3\cdot 674;$ $2696=4\cdot 674;$ $3370=5\cdot 674$ и $3^2 + 4^2 = 5^2$, по теореме Пифагора получаем, что данный треугольник прямоугольный. Так как треугольник вписанный, его гипотенуза является диаметром окружности. Поэтому, ответ $3370/2 = 1685$. **Ответ:** 1685.

5–задача

Найдите сумму всех целых значений *a,* при которых один из корней уравнения $(a^2 + 2a + 3)x^2 + (a - 10)x + a - 6 = 0$ больше *1,* а другой — меньше *1.*

Решение Неравенство $a^2 + 2a + 3 > 0 <=> (a + 1)^2 + 2 > 0$ справедливо для всех действительных значений *a*. Поэтому, график функции $y = (a^2 + 2a + 3)x^2 + (a - 10)x + a - 6$ является параболой, ветви которой направлены вверх. Условие задачи равносильно тому, что график имеет две точки пересечения с осью абсцисс, а число 1 лежит на оси ОХ между точками пересечения. Для этого необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие $y(1) < 0$. Так как $y(1) = a^2 + 4a - 13$, то, из неравенства $a^2 + 4a - 13 < 0$, получим: $a \in (-2 - \sqrt{17};\ -2 + \sqrt{17})$.

Отсюда ответ: $(-6)+(-5)+(-4)+(-3)+(-2)+(-1)+0+1+2 = -18$.

Ответ: -18.

6–задача

Сколькими способами можно число 2022 представить в виде суммы двух натуральных слагаемых, произведение которых делится на 2022?

Решение Предположим, что $2022 = a + b$, где a и b — натуральные числа, такие что ab делится на 2022. Разложим 2022 на простые множители: $2022 = 2 \cdot 3 \cdot 337$. Так как ab делится на 2022 и 2 – простое число, то хотя бы одно из чисел a или b делится на 2, а так как их сумма также кратна 2, то каждое из этих чисел делится на 2. Аналогичными рассуждениями получим, что каждое из чисел a и b делится также и на 3 и на 337. Таким образом, каждое из них делится на 2022, но тогда их сумма больше, чем 2022. Значит, требуемое представление невозможно. **Ответ**: 0.

7–задача

Сергей, Айдар и Амантай должны сделать 60 одинаковых деталей. Известно, что все трое вместе за 1 час делают 15 деталей. К работе приступил сначала Сергей. Он сделал 15 деталей, затратив на это более трех часов. Оставшуюся часть работы выполнили вместе Айдар и Амантай. На всю работу ушло 8 часов. За сколько часов мог бы изготовить 45 деталей один Сергей?

Решение Из условия задачи следует, что Айдара и Амантая можно рассматривать как одного работника, обозначив время, за которое они вместе могут изготовить 60 деталей, за y. Обозначим время, за которое Сергей может изготовить 60 деталей, за x. Так как за время xy Сергей может выполнить эту работу y раз, Айдар и Амантай — x раз, получим, что работая все трое вместе, они могут выполнить эту работу за $\frac{xy}{x+y}$ часов. Известно, что 60 деталей работая все трое вместе, они могут изготовить за $60/15 = 4$ часа. Следовательно, имеет место уравнение $\frac{xy}{x+y} = 4$. Кроме того, используя данные о фактическом времени выполнения работы, получим уравнение $\frac{1}{4}x+\frac{3}{4}y=8$. Далее, решим систему $\begin{cases} \frac{xy}{x+y}=4, \\ \frac{1}{4}x+\frac{3}{4}y=8, \end{cases}$.

Заметим, что для решения системы, из второго уравнения можно выразить *x:* $x = 32 - 3y$. Тогда первое уравнение системы запишется в виде квадратного уравнения:
$(32–3y)y = 4(32–3y) \Rightarrow 3y^2 – 40y + 128 = 0$. Его корни *8* и *16/3*. Далее, приняв во внимание условие, что Сергей сделал 15 деталей, затратив на это более трех часов, убедимся в том, что 8 является посторонним корнем и узнаем, что Сергей может изготовить 60 деталей за 16 часов. Соответственно, 45 деталей он может изготовить за 12 часов. **Ответ:** 12 часов

8–задача

Имеются два сосуда, в первом из них 1 л воды, второй сосуд пустой. Последовательно проводятся переливания из первого сосуда во второй, из второго в первый и т. д., причем доля отливаемой воды составляет последовательно $1/2,\ 1/3,\ 1/4$ и т. д. от количества воды в сосуде, из которого вода отливается. Сколько воды будет в сосудах после 2021 переливания?

Решение Просчитав несколько первых переливаний, нетрудно обнаружить, что после первого, третьего, пятого переливаний в обоих сосудах будет по *1/2 л* воды. Необходимо доказать, что так будет после любого переливания с нечетным номером. Если после переливания с нечетным номером $2k – 1$ в сосудах было по *1/2 л*, то при следующем переливании с номером $2k$ из второго сосуда берется $\frac{1}{2k+1}$ часть, так что в первом сосуде оказывается $\frac{1}{2}+\frac{1}{(2k+1)}\cdot\frac{1}{2}=\frac{k+1}{2k+1}$ (л). При следующем переливании, имеющем номер $2k + 1$, из первого сосуда берется $\frac{1}{2k+2}$ часть и в нем остается $\frac{k+1}{2k+1}-\frac{1}{(2k+2)}\cdot\frac{k+1}{(2k+1)}=\frac{1}{2}$ (л). Поэтому после седьмого, девятого и, вообще, любого нечетного переливания в сосудах будет по *1/2 л* воды. **Ответ:** *1/2 л*

9–задача

Лист бумаги разрезали на 5 частей, некоторые из этих частей разрезали на 5 частей, и т. д. Может ли за некоторое число разрезаний получиться 2022 листка бумаги?

Решение Замечаем, что при каждом разрезании из одного листка получаем пять, т. е. число листков увеличивается на 4. Следовательно, из исходного листа может получиться число листков вида $1 + 4n$, где n — натуральное число. Таким образом это число при делении на 4 дает остаток 1.

Но, $2022 = 4\cdot 505 + 2$. Следовательно, 2022 листка получиться не может. **Ответ:** нельзя.

10–задача

Решите уравнение: $\sqrt{8x+1}-\sqrt{2x-2}=\sqrt{9x-2}-\sqrt{3x-5}$.

Решение Возведем обе части уравнения в квадрат:

$8x+1-2\sqrt{(8x+1)(2x-2)}+2x-2=$

$=9x-2-2\sqrt{(9x-2)(3x-5)}+3x-5$. Приведем подобные члены: $\sqrt{(9x-2)(3x-5)}-\sqrt{(8x+1)(2x-2)}=x-3$. Теперь, введем обозначения: $\sqrt{(9x-2)(3x-5)}=\sqrt{27x^2-51x+10}=a$;

$\sqrt{(8x+1)(2x-2)}=\sqrt{16x^2-14x-2}=b$. Тогда, имеет место система уравнений: $a-b=x-3;\ \ a^2-b^2=11x^2-37x+12$.

Отсюда, воспользовавшись тем, что $a^2-b^2=(x-3)(11x-4)$, получим уравнение $x–3=0$ и систему $a–b = x–3$; $a+b = 11x–4$. Решив систему, получим $a = 6x – 3,5$. Итак, $x – 3 = 0$ или $\sqrt{27x^2-51x+10}=6x-3,5$. Из первого уравнения $x = 3$.

Для того чтобы решить второе, возведём его в квадрат, приведем подобные члены и получим уравнение: $x^2+x+0,25=0$ с корнями $x_1=x_2=-0,5$. Подставим найденные значения в исходное уравнение и убедимся в том, что $x = 3$ является корнем, а $x = –0,5$ корнем не является. **Ответ:** $x = 3$.

10 КЛАСС

1–задача

На базаре продаются рыбки, большие и маленькие. Сегодня три больших и одна маленькая стоят вместе столько же, сколько пять больших вчера. А две большие и одна маленькая сегодня стоят вместе столько же, сколько три больших и одна маленькая вчера. Определите, что дороже: одна большая и две маленьких сегодня, или пять маленьких вчера.

Решение Обозначим "рыбные цены": сегодня большая рыба стоит bc, а маленькая mc. Вчера большая стоила bv, а маленькая — mv. Тогда из условий задачи имеем два уравнения $3bc + mc = 5bv;$ $2bc + mc = 3bv + mv$. Отсюда: $5mv = (2bc + mc - 3bv)5 = 10bc + 5mc - 3(3bc + mc) = bc + 2mc$. То есть пять маленьких вчера стоили столько же, сколько одна большая и две маленькие сегодня. **Ответ:** одинаково.

2–задача

На столе «лицом» вниз лежат 4 красные и 4 чёрные карты. Вы выбираете из них две случайным образом. Какова вероятность того, что эти две карты окажутся одного цвета?

Решение После выбора первой карты останется 7 закрытых карт, из которых только 3 имеют одинаковый цвет с открытой. Итак, искомая вероятность равна $3/7$. **Ответ**: $3/7$

3–задача

Найдите наименьшее значение выражения y/x, если известно, что $x^2 - 8x + y^2 - 6y + 9 = 0$.

Решение Введем обозначение $t = y/x$ и перепишем уравнение $x^2 - 8x + y^2 - 6y + 9 = 0$ в виде $x^2 - 8x + (tx)^2 - 6(tx) + 9 = 0$.

Полученное квадратное уравнение $(t^2 + 1)x^2 + 2(-4 - 3t)x + 9 = 0$ имеет решение, когда у этого уравнения неотрицательный дискриминант $[2(-4 - 3t)]^2 - 4(t^2 + 1)9$. Таким образом, $(-4 - 3t)^2 - (t^2 + 1)9 \geq 0 \Rightarrow 24t + 7 \geq 0 \Rightarrow t \geq -7/24$.

Наименьшее значение t, удовлетворяющее этому условию равно $-7/24$. **Ответ:** $-7/24$.

4–задача

Известно, что t является корнем уравнения $x^3-7x+1=0$. Найдите значение выражения $t^4+3t^3-7t^2-20t+2025$.

Решение Из условия, $t^3-7t+1=0 \Rightarrow t^3-7t=-1 \Rightarrow$
$\Rightarrow t^4-7t^2=-t$. Следовательно,

$$t^4+3t^3-7t^2-20t+2025=-t+3t^3-20t+2025=$$
$$=3t^3-21t+2025=3(t^3-7t)+2025=3(-1)+2025=2022.$$

Ответ: *2022*

5–задача

Сергей, Айдар и Амантай должны сделать 60 одинаковых деталей. Известно, что все трое вместе за 1 час делают 15 деталей. К работе приступил сначала Сергей. Он сделал 15 деталей, затратив на это более трех часов. Оставшуюся часть работы выполнили вместе Айдар и Амантай. На всю работу ушло 8 часов. За сколько часов мог бы изготовить 45 деталей один Сергей?

Решение ***Смотри задачу 7 для 9 класса***.

6–задача

Решить в целых числах уравнение $(x-2y)(x+y)=7$.

Решение Так как *x, y* – целые числа, то находим решения исходного уравнения, как решения следующих четырёх систем:

$$1)\begin{cases} x-2y=7, \\ x+y=1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3, \\ y=-2. \end{cases} \qquad 2)\begin{cases} x-2y=1, \\ x+y=7, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=5, \\ y=2. \end{cases}$$

$$3)\begin{cases} x-2y=-7, \\ x+y=-1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-3, \\ y=2. \end{cases} \qquad 4)\begin{cases} x-2y=-1, \\ x+y=-7, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-5, \\ y=-2. \end{cases}$$

Ответ: (3; –2), (5; 2), (–3; 2), (–5; –2).

7–задача

Решите уравнение:

$$\sin x+\sin^3 x+2022\sin^5 x=\cos(2x)+\cos^3(2x)+2022\cos^5(2x).$$

Решение Введем функцию $f(t)=t+t^3+2022t^5$. Функция является возрастающей, как сумма трех возрастающих функций. Следовательно, уравнение *f(a) = f(b)* равносильно

уравнению $a = b$. В нашем случае, $f(sinx) = f(cos2x)$. Поэтому,
$\sin x = \cos 2x \Rightarrow 2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0 \Rightarrow$

$$\left[\begin{array}{l} \sin x = -1, \\ \sin x = 0,5, \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z, \\ x = (-1)^n \cdot \dfrac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z. \end{array}\right.$$

Ответ: $x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z;\ x = (-1)^n \cdot \dfrac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z.$

8–задача

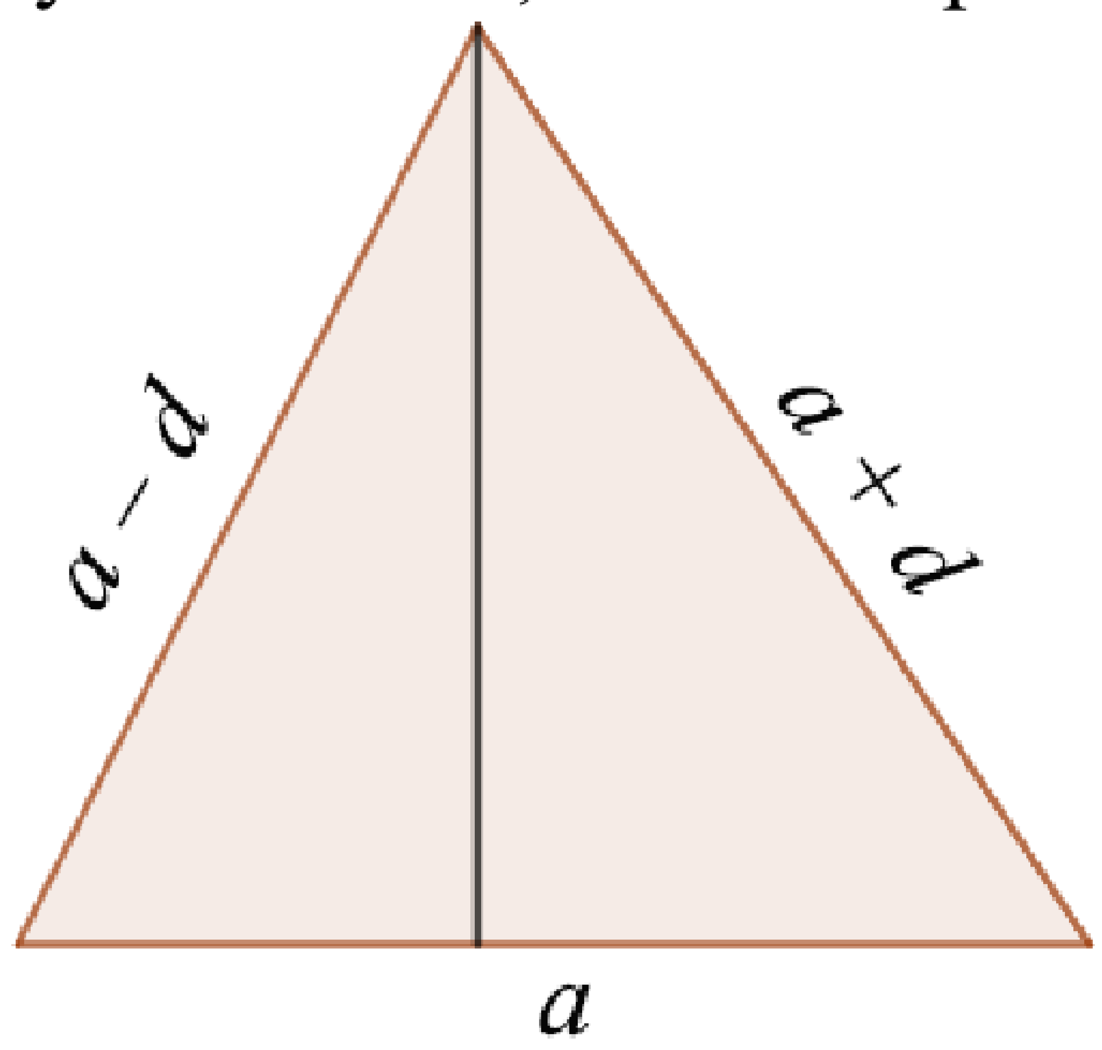
Фирма получает яблочный и виноградный сок в одинаковых бидонах и выпускает яблочно–виноградную смесь в одинаковых банках. Одного бидона яблочного сока хватает ровно на 6 банок смеси, а одного бидона виноградного — ровно на 10. Когда рецептуру напитка изменили, одного бидона яблочного сока стало хватать ровно на 5 банок смеси. На сколько банок смеси хватает теперь одного бидона виноградного сока? (Напиток водой не разбавляется.)

Решение На 30 банок было затрачено 5 бидонов яблочного и 3 бидона виноградного сока. Итого 8 бидонов. По новой рецептуре на 30 банок затратят 6 бидонов яблочного сока. Значит, виноградного сока затратят 2 бидона. Итак, бидона виноградного сока хватит на 15 банок. **Ответ:** 15 банок.

9–задача

Стороны треугольника имеют длины, являющиеся последовательными членами арифметической прогрессии. Докажите, что высота, проведенная к средней, по длине, стороне, делит ее на части n и m, разность длин которых равна разности между седьмым и третьим членами упомянутой арифметической прогрессии.

Решение Обозначим длины сторон через $a-d,\ a,\ a+d$ и выразим высоту через катеты треугольников, на которые высота делит исходный треугольник. Тогда,



$h^2=(a-d)^2-n^2;\ h^2=(a+d)^2-m^2.$
Поэтому, $(a-d)^2-n^2=(a+d)^2-m^2$ $\Leftrightarrow (a^2-2ad+d^2)-n^2=(a^2+2ad+d^2)-m^2 \Leftrightarrow -2ad-n^2=2ad-m^2 \Leftrightarrow m^2-n^2=4ad \Leftrightarrow (m-n)(m+n)=4ad \Leftrightarrow (m-n)a=4ad \Leftrightarrow m-n=4d.$

Осталось показать, что полученное число является разности между седьмым и третьим членами упомянутой арифметической прогрессии: $a_7-a_3=(a_1+6d)-(a_1+2d)=4d.$

10–задача

Решите уравнение: $\sqrt{8x+1}-\sqrt{2x-2}=\sqrt{9x-2}-\sqrt{3x-5}$.

Решение Возведем обе части уравнения в квадрат:

$$8x+1-2\sqrt{(8x+1)(2x-2)}+2x-2=9x-2-2\sqrt{(9x-2)(3x-5)}+3x-5.$$

Приведем подобные члены: $\sqrt{(9x-2)(3x-5)}-\sqrt{(8x+1)(2x-2)}=x-3$.

Теперь, введем обозначения $\sqrt{(9x-2)(3x-5)}=\sqrt{27x^2-51x+10}=a$;

$\sqrt{(8x+1)(2x-2)}=\sqrt{16x^2-14x-2}=b$. Тогда, имеет место система уравнений: $a-b=x-3;\quad a^2-b^2=11x^2-37x+12$.

Отсюда, воспользовавшись тем, что $a^2-b^2=(x-3)(11x-4)$, получим уравнение $x-3=0$ и систему $a-b=x-3$; $a+b=11x-4$. Решив систему, получим $a=6x-3{,}5$. Итак, $x-3=0$ или $\sqrt{27x^2-51x+10}=6x-3{,}5$. Из первого уравнения $x=3$.

Для того чтобы решить второе, возведём его в квадрат, приведем подобные члены и получим уравнение: $x^2+x+0{,}25=0$ с корнями $x_1=x_2=-0{,}5$. Подставим найденные значения в исходное уравнение и убедимся в том, что $x=3$ является корнем, а $x=-0{,}5$ корнем не является.

Ответ: $x=3$.

11 КЛАСС

1–задача

В классе 25 детей. Для дежурства наугад выбирают двоих. Вероятность того, что оба дежурных окажутся мальчиками, равна $3/25$. Сколько в классе девочек?

Решение Пусть в классе n мальчиков, тогда число способов выбрать из них пару дежурных равно $n(n-1)/2$, число способов выбрать пару из всего классе равно $25\cdot 24/2$. Поэтому вероятность того, что будут выбраны два мальчика, равна $n(n-1)/(25\cdot 24)$. Отсюда, $\frac{n(n-1)}{25\cdot 24}=\frac{3}{25} \Rightarrow n(n-1)=72=9\cdot 8$.

Следовательно, $n = 9$, то есть в классе 9 мальчиков и 16 девочек. **Ответ**: 16 девочек.

2–задача

Пусть a и b – целые числа. Докажите, что если $a^2 + 9ab + b^2$ делится на 11, то и $a^2 - b^2$ делится на 11.

Решение $a^2 + 9ab + b^2 = (a-b)^2 + 11ab$. Отсюда следует, что на 11 делится $(a-b)^2$. Поскольку 11 – число простое, то на 11 делится и $(a-b)$. Поэтому, и $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ делится на 11.

3–задача

Сколько решений имеет уравнение $x^4 + y^3 + z^2 + t = 270$, если числа x, y, z, t являются четными, натуральными?

Решение Так как $6^4 = 1296 > 270$, или $x = 2$ или $x = 4$.

1) $x = 4$, то $y^3 + z^2 + t = 270 - 4^4 = 270 - 256 = 14$.

Отсюда, $y = z = t = 2$. То есть, имеется одно такое решение.

2) $x = 2$, то $y^3 + z^2 + t = 270 - 16 = 254$. Поэтому, так как $8^3 = 512 > 254$, или $y = 2$, или $y = 4$, или $y = 6$.

2.1) $x = 2, y = 6$. Тогда, $z^2 + t = 254 - 216 = 38$.

Поэтому, так как $8^2 = 64 > 38$, или $z = 2$, или $z = 4$, или $z = 6$. Еще 3 решения.

2.2) $x = 2, y = 4$. То $z^2 + t = 254 - 64 = 190$. Поэтому, так как $14^2 = 196$, или $z = 2,$ или $z = 4,$ или $z = 6,$ или $z = 8,$ или $z = 10,$ или $z = 12$. Еще 6 решений.

2.3) $x = 2, y = 2$. То $z^2 + t = 254 - 8 = 246$.

Поэтому, так как $16^2 = 256 > 246$, или $z=2,$ или $z=4,$ или $z= 6,$ или $z = 8,$ или $z = 10,$ или $z = 12,$ или $z = 14$. Еще 7 решений.

Итак, имеется всего 17 решений. **Ответ**: 17.

4–задача

Арген построил векторы с началом в центре клетки b4 и концами в центрах всех остальных клеток доски (см. рис. 1). Найдите модуль суммы этих векторов, зная, что сторона клетки доски равна 1.

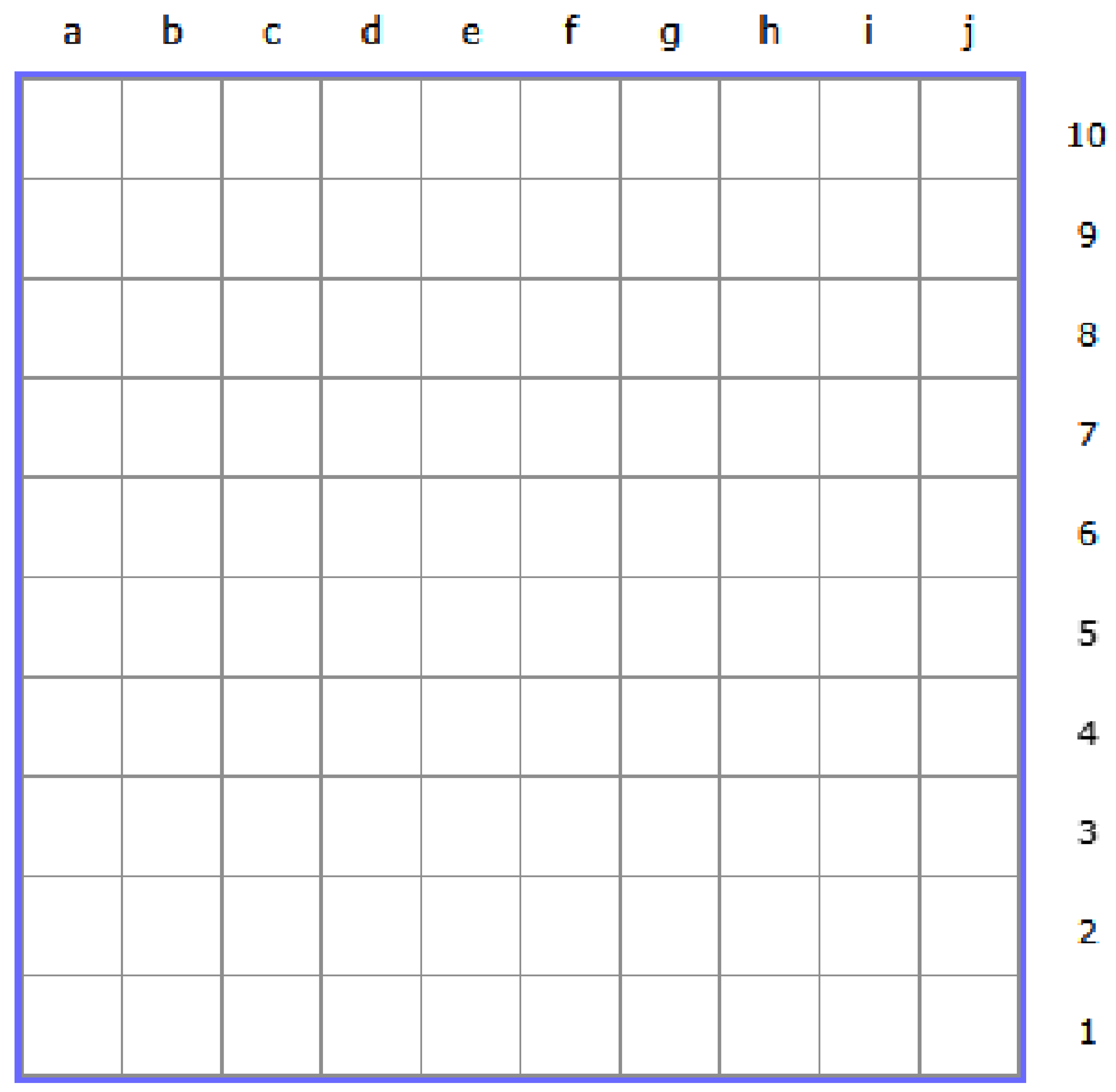


Рис. 1

Решение ***Первый способ***:

Пусть P — общее начало векторов, O — центр квадрата, образующего доску, а S — точка, симметричная P относительно O (см. рис. 2). Для любой пары центров клеток A и B, симметричных относительно точки O, по правилу параллелограмма выполняется равенство: $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{PS}$. Всего таких пар 50. Значит, сумма всех векторов равна $50\overrightarrow{PS}$. Ее модуль: $\left|50\overrightarrow{PS}\right| = 50\sqrt{3^2+7^2} = 50\sqrt{58}$.

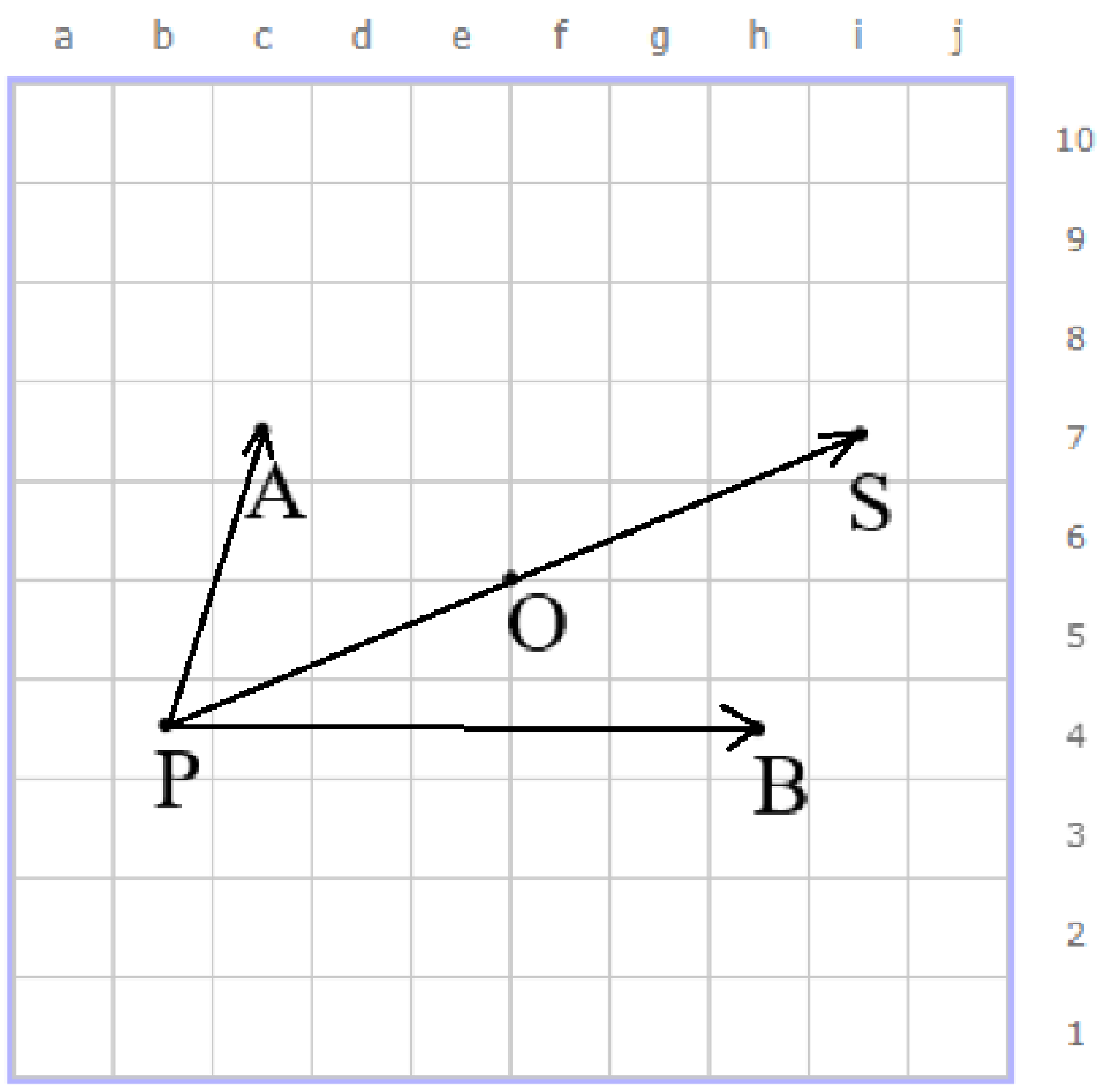


Рис. 2

Второй способ: Введём прямоугольную систему координат с началом в центре клетки *b4* (см. рис. 3). В рассматриваемой системе координат центр каждой клетки имеет целочисленные координаты вида $(i;\ j)$, $-1 \le i \le 8;\ \ -3 \le j \le 6$.

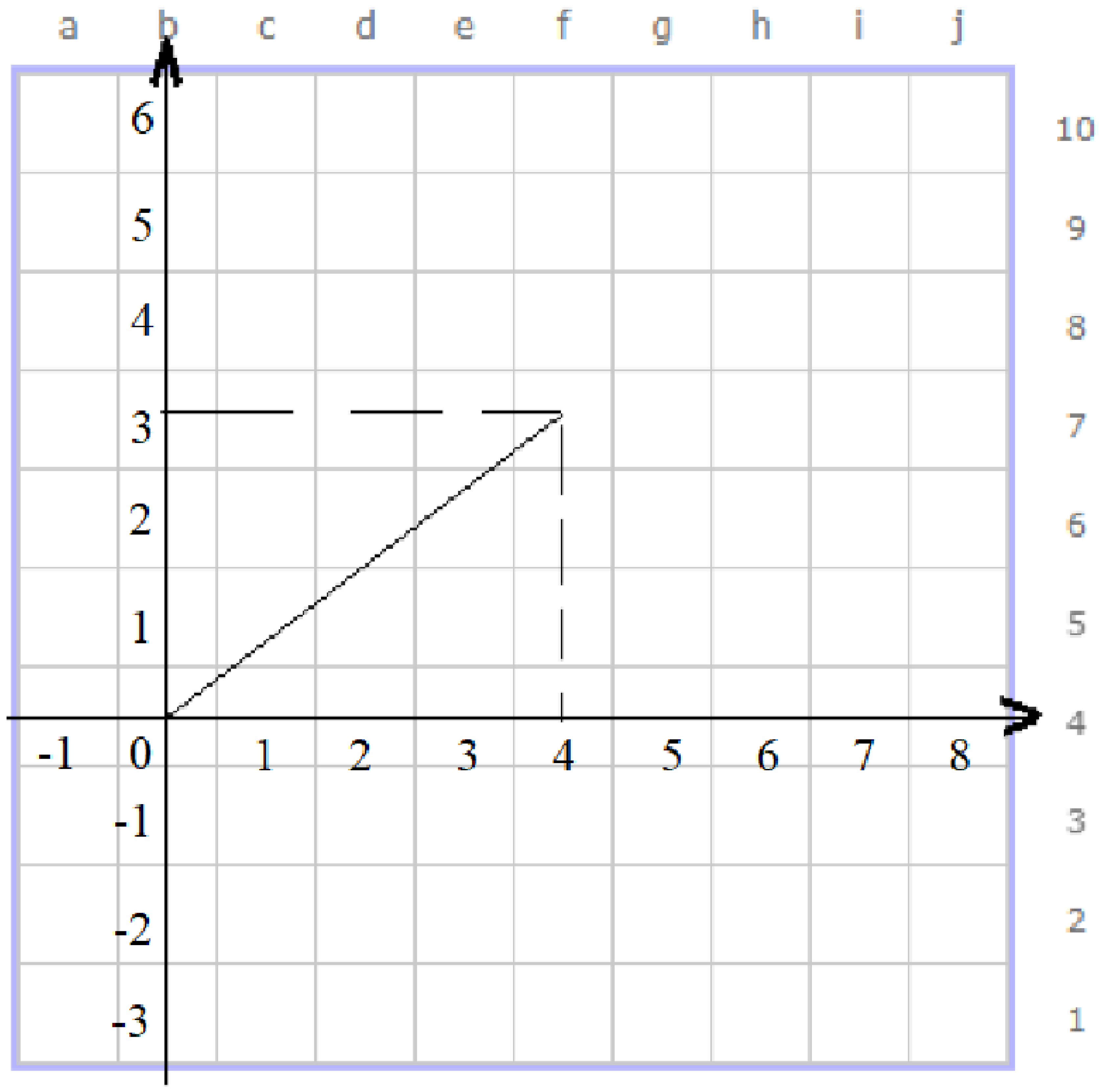


Рис. 3

Пусть сумма $\vec{S}$ указанных векторов имеет координаты $(a; b)$. Так как абсциссу и ординату суммы можно вычислить независимо друг от друга, то

$a = 10\sum_{i=-1}^{8} i = 10 \cdot 35 = 350;\ \ b = 10\sum_{j=-3}^{6} j = 10 \cdot 15 = 150 \cdot$ Поэтому,

$$|\vec{S}| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{350^2 + 150^2} = \sqrt{50^2(7^2 + 3^2)} = 50\sqrt{58} \cdot$$

Ответ: $50\sqrt{58}$.

5–задача

Из бесконечной последовательности: $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5};\ldots$ выберите семь чисел, которые составляют арифметическую прогрессию.

Решение Рассмотрим последовательность $\frac{a_1}{p}; \frac{a_1 + d}{p}; \frac{a_1 + 2d}{p}; \ldots; \frac{a_1 + (n-1)d}{p}$, которая является арифметической прогрессией с разностью d/p. Для того, чтобы указанные дроби входили в последовательность $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5};\ldots$ необходимо и достаточно, чтобы знаменатель p был кратен каждому из числителей. Пусть

$a_1 = d = 1$, тогда число p должно быть кратно каждому из чисел: $1, 2, 3, \ldots, n$. Таким образом, для того, чтобы выбрать n чисел, удовлетворяющих условию достаточно выбрать
$p = n!$. В результате, получится арифметическая прогрессия: $\frac{1}{7!}; \frac{2}{7!}; \frac{3}{7!}; \frac{4}{7!}; \frac{5}{7!}; \frac{6}{7!}; \frac{7}{7!}$ из чисел, которые в заданной последовательности записаны в виде

$$\frac{1}{5040}; \frac{1}{2560}; \frac{1}{1680}; \frac{1}{1260}; \frac{1}{1008}; \frac{1}{840}; \frac{1}{720}.$$

Ответ: $\frac{1}{5040}; \frac{1}{2560}; \frac{1}{1680}; \frac{1}{1260}; \frac{1}{1008}; \frac{1}{840}; \frac{1}{720}.$

6–задача

Сергей, Айдар и Амантай должны сделать 60 одинаковых деталей. Известно, что все трое вместе за 1 час делают 15 деталей. К работе приступил сначала Сергей. Он сделал 15 деталей, затратив на это более трех часов. Оставшуюся часть работы выполнили вместе Айдар и Амантай. На всю работу ушло 8 часов. За сколько часов мог бы изготовить 45 деталей один Сергей?

Решение ***Смотри задачу 7 для 9 класса***.

7–задача

Решите уравнение:

$$\sin x + \sin^3 x + 2022\sin^5 x = \cos(2x) + \cos^3(2x) + 2022\cos^5(2x).$$

Решение ***Смотри задачу 7 для 10 класса***.

8–задача

Имеются два сосуда, в первом из них 1 л воды, второй сосуд пустой. Последовательно проводятся переливания из первого сосуда во второй, из второго в первый и т. д., причем доля отливаемой воды составляет последовательно $1/2, 1/3, 1/4$ и т. д. от количества воды в сосуде, из которого вода отливается. Сколько воды будет в сосудах после 2021 переливания?

Решение ***Смотри задачу 8 для 9 класса***.

9–задача

Для того, чтобы пройти 2 км пешком, проехать 3 км на велосипеде и 20 км — на машине, Айбеку требуется 1 час 6 мин. А если потребуется пройти 5 км пешком, проехать 8 км на велосипеде и 30 км — на машине, ему понадобится 2 часа 24 мин. Сколько времени потребуется Айбеку, чтобы пройти 4 км пешком, проехать 5 км на велосипеде и 80 км — на машине?

Решение Пусть $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}$ скорости ходьбы, езды на велосипеде и машине соответственно. Тогда, согласно условию задачи: $\begin{cases} 2x+3y+20z=66, \\ 5x+8y+30z=144, \end{cases}$ =>

$$\begin{cases} x=33-1,5y-10z, \\ 5(33-1,5y-10z)+8y+30z=144, \end{cases} => \begin{cases} x=96-70z, \\ y=40z-42. \end{cases}$$

Следовательно, $4x+5y+80z=4(96-70z)+5(40z-42)+80z=174.$

Ответ: *174 мин = 2 часа 54 минуты = 2,9 ч.*

10–задача

Решите уравнение: $\sqrt{8x+1}-\sqrt{2x-2}=\sqrt{9x-2}-\sqrt{3x-5}$.

Решение ***Смотри задачу 10 для 10 класса***.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Асанбеков Амантай Муканмедиевич, преподаватель Кыргызско – Шведской математической школы.

Асанов Рухиддин Авытович, преподаватель Кыргызско-Туркцкого Университета «Манас».

Бурова Елена Сергеевна, старший преподаватель Американского Университета в Центральной Азии.

Долматов Сергей Лазаревич, преподаватель Кыргызско – Шведской математической школы.

Доолотова Аджар Азатбековна, преподаватель Американского Университета в Центральной Азии.

Кыдыралиев Сыргак Капарович, профессор Американского Университета в Центральной Азии.

Урдалетова Анаркуль Бурганаковна, зав. кафедрой Кыргызско–Турецкого Университета «Манас».

Усенов Изат Абдыраевич, декан математического факультета Кыргызского Национального Университета.