Э. Р. Атаманов,
к.ф.-м.н., доц., ассоц. профессор направления «Естественные науки и информационные технологии», Американский университет в Центральной Азии

Оценка устойчивости решения одной смешанной задачи для уравнения теплопроводности

Рассмотрим двумерное уравнение теплопроводности

$$u_t(x,y,t) - u_{xx}(x,y,t) - u_{yy}(x,y,t) = 0 \qquad (1)$$

в области $D: \{x > 0, -\infty < y < \infty, t > 0\}$, и пусть $u(x,y,t)$ удовлетворяет следующим условиям:

$$\text{а) } u_t(0,y,t) + a\,u_x(0,y,t) + b u_y(0,y,t) = 0, \qquad (2)$$

где a, b вещественные постоянные;

$$\text{б) } u(x,y,0) = \varphi(x,y). \qquad (3)$$

Классически корректные смешанные задачи типа (1)–(3) для уравнений и систем параболического типа рассмотрены в работах Т.Н. Загорского [1], С.Д. Эйдельмана [4], В.И. Михайлова [2].

Физическая интерпретация такого рода задач для уравнения теплопроводности дана в работе А.Н Тихонова [3].

Смешанная задача (1)–(3) без дополнительных условий на постоянные a, b некорректно поставлена. Об этом говорит, например, следующая последовательность функций, являющихся при $b = 0, a > 0$ решением задачи (1)–(3)

$$u_k(x,y,t) = e^{kt} e^{-\frac{k}{a}x} e^{-\sqrt{k-\frac{k^2}{a^2}}\,y} e^{-k^{1/2}}.$$

Так как

$$u_k(x,y,0) = e^{-\frac{k}{a}x} e^{-\sqrt{k-\frac{k^2}{a^2}}\,y} e^{-k^{1/2}},$$

то $\varphi_k \to 0$, при $k \to \infty$ в то время, как само решение $u_k(x,y,t)$ отнюдь не мало.

Мы показываем, что задача (1)-(2) при произвольных вещественных a, b является условно-корректной в смысле А.Н.Тихонова. Именно, мы получаем априорную оценку решения в зависимости от начальных данных (предполагая решение существующим и принадлежащим некоторому классу функций), из которой следует единственность решения (1)–(3).

В дальнейшем нам удобнее рассматривать смешанную задачу с нулевым начальным условием, к которой исходную задачу (1)–(3) легко свести. Поэтому вместо условий (1)–(3) имеем соответственно следующие:

$$u_t(0,y,t) + a\,u_x(0,y,t) + b\,u_y(0,y,t) = \psi(x,y) \qquad (4)$$

$$u(x,y,0) = 0. \qquad (5)$$

Определение. Будем говорить, что $u(x,y,t)$ принадлежит классу $U(M)$, если имеет непрерывные производные $u_t, u_x, u_y, u_{xx}, u_{yy}$ и в точке (x,y,t)

$$\max\left(|u|, |u_t|, |u_x|, |u_y|, |u_{xx}|, |u_{yy}| \right) \le \frac{M}{1+y^2}. \tag{6}$$

Основным результатом работы является следующее.

Теорема 1. Пусть функция $u(x,y,t) \in U(M)$ и является решением задачи (1), (4), (5), тогда, если

$$|\psi(y,t)| \le \frac{\varepsilon}{1+y^2}, \tag{7}$$

то

$$|u(x,y,t)| \le C(x,t)\,\varepsilon^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}}. \tag{8}$$

Отметим, что из теоремы легко следует, что решение задачи (1), (4), (5) в классе $U(M)$ единственное.

Доказательство теоремы. Задачу (1), (4), (5) будем решать с помощью преобразования Фурье по y и преобразования Лапласа по t. Тогда, для того чтобы $u(x,y,t)$ удовлетворяла (1), (4), (5), ее образ $V(x,\eta,p)$ после применения преобразования Фурье и Лапласа должен быть решением следующего дифференциального уравнения

$$\frac{d^2V(x,\eta,p)}{dx^2} = (p+\eta^2)V(x,\eta,p) \tag{9}$$

с краевым условием

$$(p+ib\eta)V(0,\eta,p) + aV_x(0,\eta,p) = \tilde{\psi}(p,\eta), \tag{10}$$

где

$$\tilde{\psi}(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-pt}dt \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\eta y}\,\psi(y,t)dy.$$

Ясно, что фундаментальная систем решений уравнения (9) имеет вид

$$V(x,\eta,p) = c\,e^{\pm\sqrt{p+\eta^2}\,x}.$$

В силу условия (6) нас будут интересовать решения, не растущие при $x \to \infty$, поэтому фундаментальное решение, используемое для построения функции $V(x,\eta,p)$, есть $e^{-x\sqrt{p+\eta^2}}$. Решая с учетом этого замечания краевую задачу (9)–(10), получим

$$V(x,\eta,p) = \frac{\tilde{\psi}(p,\eta)e^{-x\sqrt{p+\eta^2}}}{p+ib\eta - a\sqrt{p+\eta^2}}. \tag{11}$$

Уместно отметить, что с учетом (6) для $V(x,\eta,p)$, имеем:

$$|V(x,p,\eta)| \le \frac{2M\pi}{P_0(\eta^2+1)}, \tag{12}$$

где $P_0 = Re p > 0$.

В самом деле,

$$|\hat{u}(x,y,t)| = \left|\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\eta y}\,u(x,y,t)dy\right| \le \frac{1}{\eta^2}\int_{-\infty}^{\infty} |u_{yy}(x,y,t)|\,dy \le \frac{M\pi}{\eta^2},$$

$$|\hat{u}(x,\eta,t)| = |\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\eta y}\, u(x,y,t)dy| \le M\pi.$$

Отсюда

$$|\hat{u}(x,\eta,t)| = M\pi \min\left(1, \frac{1}{\eta^2}\right) \le \frac{2M\pi}{\eta^2+1}.$$

Далее получаем

$$|V(x,p,\eta)| = |\int_0^{\infty} e^{-pt}\, \hat{u}(x,\eta,t)dt| \le \frac{2M\pi}{P_0(\eta^2+1)}.$$

Точно так же с учетом (7) для $\tilde{\psi}(\eta,p)$ имеем

$$|\tilde{\psi}(\eta,p)| \le \frac{c_1\varepsilon}{P_0}. \tag{13}$$

Решение смешанной задачи согласно формуле (11) записывается в виде

$$u(x,y,t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\eta y}\, d\eta \int_{P_0-i\infty}^{P_0+i\infty} V(x,\eta,p)e^{Pt}dp =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\eta y}\, d\eta \int_{P_0-i\infty}^{P_0+i\infty} \frac{\tilde{\psi}(p,\eta)e^{-x\sqrt{p-\eta^2}}e^{Pt}}{p+ib\eta-a\sqrt{p+\eta^2}}. \tag{14}$$

Рассмотрим отдельно знаменатель подинтегрального выражения внутреннего интеграла. Найдем корни следующего уравнения

$$p + ib\eta - a\sqrt{p+\eta^2} = 0,$$

$$p_{1,2} = \frac{a^2}{2} - ib\eta \pm\sqrt{\frac{a^4}{4} + a^2\eta^2 - iba^2\eta^2}.$$

Отсюда

$$p_{1,2} = p_0 + ip_1 = \frac{a^2}{2} \pm\sqrt[4]{\left(a^2\eta^2+\frac{a^4}{4}\right)^2 + a^4b^2\eta^2}\, \cos\frac{1}{2}arctg\frac{-a^2b\eta}{a^2\eta^2+\frac{a^4}{4}} +$$

$$+ i\left(-b\eta \pm \sqrt[4]{\left(a^2\eta^2+\frac{a^4}{4}\right)^2 + a^4b^2\eta^2}\, \sin\frac{1}{2}arctg\frac{-a^2b\eta}{a^2\eta^2+\frac{a^4}{4}}\right).$$

Введем следующие обозначения:

$$P' = -b\eta - \sqrt[4]{\left(a^2\eta^2+\frac{a^4}{4}\right)^2 + a^4b^2\eta^2}\, \sin\frac{1}{2}arctg\frac{-a^2b\eta}{a^2\eta^2+\frac{a^4}{4}},$$

$$P'' = -b\eta + \sqrt[4]{\left(a^2\eta^2+\frac{a^4}{4}\right)^2 + a^4b^2\eta^2}\, \sin\frac{1}{2}arctg\frac{-a^2b\eta}{a^2\eta^2+\frac{a^4}{4}}.$$

Легко видеть, что при любом p_0 подинтегральное выражение (14) имеет особенности, т.е. для любых a, b действительная часть p_0 корня рассмотренного выше уравнения при $-\infty < \eta < \infty$ может быть как угодно большой. Чтобы обойти эту трудность, при проведении оценки поступим следующим образом.

Разобьем внутренний интеграл в (14) на несколько слагаемых, а именно,

$$\int\limits_{P_0-i\infty}^{P_0+i\infty} V(x,\eta,p)\,e^{Pt}dp = \int\limits_{P_0-i\infty}^{P_0+ip'-i\delta} V(x,\eta,p)\,e^{Pt}dp + \int\limits_{P_0+ip'-i\delta}^{P_0+ip'+i\delta} V(x,\eta,p)\,e^{Pt}dp +$$

$$+ \int\limits_{P_0+ip'+i\delta}^{P_0+ip''-i\delta} V(x,\eta,p)\,e^{Pt}dp + \int\limits_{P_0+ip''-i\delta}^{P_0+ip''+i\delta} V(x,\eta,p)\,e^{Pt}dp + \int\limits_{P_0+ip''+i\delta}^{P_0+i\infty} V(x,\eta,p)\,e^{Pt}dp,\ \delta > 0.$$

Теперь оценим каждое слагаемое отдельно. Используя (12), получим следующую оценку

$$\left| \int\limits_{P_0+ip'-i\delta}^{P_0+ip'+i\delta} V(x,\eta,p)\,e^{Pt}dp \right| \le \left| \int\limits_{P_0+ip''-i\delta}^{P_0+ip''+i\delta} |V(x,\eta,p)|\,|ePt|\,dp \right| \le \frac{4\delta M e^{P_0 t}\pi}{P_0(\eta^2+1)}. \tag{15}$$

Аналогично оценивается следующее слагаемое

$$\left| \int\limits_{P_0+ip''\ i\delta}^{P_0+ip''+i\delta} V(x,\eta,p)\,e^{Pt}dp \right| \le \frac{4\delta\, e^{P_0 t} M\pi}{P_0(\eta^2+1)}. \tag{16}$$

Далее, оценим следующий интеграл

$$\int\limits_{P_0-i\infty}^{P_0+ip'-i\delta} \frac{\tilde{\psi}(p,\eta)e^{-x\sqrt{p+\eta^2}}e^{pt}dp}{p+ib\eta-a\sqrt{p+\eta^2}}.$$

Заметим, что в данных пределах интегрирования подинтегральная функция особенностей не имеет.

Так как $|\, p + ib\eta - a\sqrt{p+\eta^2}\,| > c_2\delta$, где c_2 – постоянная, то из (13) следует

$$\left| \int\limits_{P_0\ i\infty}^{P_0+ip'-i\delta} \frac{\tilde{\psi}(p,\eta)e^{-x\sqrt{p+\eta^2}}e^{pt}dp}{p+ib\eta-a\sqrt{p+\eta^2}} \right| \le \int\limits_{P_0-i\infty}^{P_0+ip'-i\delta} \left| \frac{\tilde{\psi}(p,\eta)e^{-x\sqrt{p+\eta^2}}e^{pt}}{p+ib\eta-a\sqrt{p+\eta^2}} \right| dp \le$$

$$\le \frac{c_1\varepsilon\, e^{P_0 t}}{P_0 c_2\delta} \int\limits_{-\infty}^{p'-\delta} e^{-x\sqrt{(P_0+\eta^2)^2}} \cos\frac{1}{2}\,arctg\frac{s}{P_0+\eta^2}\,ds \le$$

$$\le \frac{c_1\varepsilon}{P_0 c_2\delta} \int\limits_{-\infty}^{p'-\delta} e^{\alpha(|\eta|+|s|^{1/2})}\,ds = \frac{e^{P_0 t}\varepsilon\, c_1 e^{-\alpha|\eta|}}{P_0 c_2\delta} \int\limits_{-\infty}^{p-\delta} e^{-\alpha|s|^{1/2}}\,ds \le$$

$$\le \frac{c_0 c_1 \varepsilon e^{-\alpha|\eta|} e^{P_0 t}}{P_0 c_2\delta},\ \text{где}\ \alpha = \frac{x}{\sqrt[4]{8}}.$$

При получении последней оценки мы сделали следующую замену $P = P_0 + is$ и пользовались неравенствами:

$$\sqrt{a^2+b^2} \ge \frac{1}{\sqrt{2}}(\,|a| + |b|\,),$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \le \cos\frac{1}{2}\,arctg\,\frac{s}{P_0+\eta^2} \le 1,$$

$$\int\limits_{-\infty}^{P'-\delta} e^{-|s|^{1/2}}\,ds \le \int\limits_{-\infty}^{P'-\delta} e^{-|s|^{1/2}} \le c_0.$$

Вполне аналогично имеем

$$\int\limits_{P_0+ip''+i\delta}^{P_0+i\infty} \left| \frac{\tilde{\psi}(p,\eta)e^{-x\sqrt{p+\eta^2}}\, e^{pt}dp}{p+ib\eta-a\sqrt{p+\eta^2}} \right| \le \frac{e^{P_0t}c_0c_1\varepsilon\, e^{-\alpha|\eta|}}{\alpha P_0c_2\delta}. \tag{18}$$

Наконец, получим еще одну предварительную оценку

$$\left| \int\limits_{P_0+ip''+i\delta}^{P_0+ip-i\delta} \frac{\tilde{\psi}(p,\eta)e^{x\sqrt{p+\eta^2}}\, e^{pt}dp}{p+ib\eta-a\sqrt{p+\eta^2}} \right| \le \frac{e^{P_0t}c_1\varepsilon\, e^{\alpha|\eta|}}{P_0c_2\delta}\int\limits_{p-\delta}^{p\ \delta} e^{-\alpha|s|^{1/2}}ds \le$$

$$\le \frac{e^{P_0t}c_0c_1\varepsilon\, e^{\alpha|\eta|}}{\alpha P_0c_2\delta}. \tag{19}$$

Искомая оценка получается из (14) с учетом вспомогательных оценок (15)-(19)

$$|u(x,y,t)| = \left| \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\eta y}dy \int\limits_{P_0-i\infty}^{P_0+i\infty} \frac{\tilde{\psi}(p,\eta)e^{x\sqrt{p+\eta^2}}\, e^{pt}dp}{p+ib\eta-a\sqrt{p+\eta^2}} \right| \le$$

$$\le \left| \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\eta y}dy \left[\frac{4M\delta e^{P_0t}\pi}{P_0(\eta^2+1)} + \frac{c_0c_1\varepsilon\, e^{-\alpha|\eta|}e^{P_0t}}{\alpha P_0c_2\delta} \right] \right| \le$$

$$\le \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\eta y} \left| \frac{4M\delta\, e^{P_0t}}{P_0(\eta^2+1)} d\eta + \int\limits_{\infty}^{\infty} \right| e^{i\eta y} \left| \frac{e^{P_0t}c_1c_0\, e^{\alpha|\eta|}}{\alpha P_0c_2\delta} d\eta \le \right.$$

$$\le \frac{4M\delta\, e^{P_0t}}{P_0} + \frac{c_0c_1\varepsilon\, e^{P_0t}}{\alpha P_0c_2\delta}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|\eta|}d\eta.$$

Введем обозначение

$$D(x) = \frac{c_1c_0}{P_0c_2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{\ \alpha|\eta|}d\eta = \frac{c_1c_0}{P_0\alpha^2c_2},$$

тогда получим

$$|u(x,y,t)| \le \frac{4M\delta\, e^{P_0t}}{P_0} + \frac{\varepsilon D(x)\, e^{P_0t}}{\delta}. \tag{20}$$

Ранее на δ было наложено лишь условие $\delta > 0$ Выберем теперь δ таким, чтобы выполнялось следующее равенство

$$\frac{4M\delta\, e^{P_0t}}{P_0} = \frac{\varepsilon D(x)\, e^{P_0t}}{\delta}.$$

Из последнего равенства имеем

$$\delta = \frac{1}{2}\varepsilon^{\frac{1}{2}}[P_0D(x)]^{\frac{1}{2}}M^{\ \frac{1}{2}}.$$

Подставим найденное δ в (20)

$$|u(x,y,t)| \le \frac{2M[P_0D(x)]^{\frac{1}{2}}M^{-\frac{1}{2}}\varepsilon^{\frac{1}{2}}e^{P_0t}}{P_0} +$$

$$+ \frac{\varepsilon D(x)\, e^{P_0t}}{\frac{1}{2}[P_0D(x)]^{1/2}M^{\ 1/2}\varepsilon^{1/2}} = c(x,t)\varepsilon^{\frac{1}{2}}M^{\ \frac{1}{2}},$$

где $c(x, t) = [4\, D(x)\; p_0^{-1} e^{2p_0 t}\,]^{\frac{1}{2}}$.

Рассмотрим теперь уравнение (1) с более общим краевым условием. Пусть $u(x,y,t)$ является решением уравнения (1) и удовлетворяет условию

$$\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k \frac{\partial^k}{\partial x^k} + \beta_k \frac{\partial^k}{\partial y^k})\, u(0, y, t) = e(y, t), \tag{21}$$

где α_k, β_k – вещественные постоянные и справедливо (5). Как было показано выше, смешанная задача (1), (22), (5) без дополнительных условий на постоянные α_k, β_k некорректно поставлена.

Теорема 2. Пусть функция $u(x,y,t) \in U(M)$ и является решением задачи (1), (22), (5), тогда, если

$$f(y, t) \le \frac{\varepsilon}{1+y^2}, \tag{22}$$

то

$$|u(x,y,t)| \le c(x,t)\, \varepsilon^{\gamma} M^{1-\gamma}, \tag{23}$$

где $0 < \gamma < 1$,

Очевидным следствием теоремы 2 является единственность рассматриваемой задачи.

Доказательство. Поставленную задачу интегральными преобразованиями сведем к стационарной задаче. Получим дифференциальное уравнение (9) с краевым условием

$$\sum_{k=1}^{n}\alpha_k \frac{\partial^k V(0,\eta,p)}{\partial x^k} + \sum_{k=1}^{n}\beta_k (i\eta)^k\, V(0, \eta, p) = \tilde f(\eta, p), \tag{24}$$

где

$$\tilde f(\eta, p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\eta y} f(y, t)dy.$$

Так как нас интересуют функции из класса $U(M)$, то в качестве решения задачи (9), (26) возьмем следующую функцию

$$V(x, \eta, p) = \frac{\tilde f(\eta,p)e^{-x\sqrt{p+\eta^2}}}{\sum_{k=1}^{n}(-1)^k \alpha_k (p+\eta^2)^{\frac{1}{2}k} + \sum_{k=1}^{n}(i\eta)^k \beta_k} \tag{25}$$

Поступая так же, как и выше, можно убедиться, что для $V(x,\eta,p)$ справедлива (12) и выполняется неравенство

$$f(\eta, p) \le \frac{\varepsilon\pi}{P_0}. \tag{26}$$

Решение смешанной задачи представимо в виде

$$u(x, y, t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\eta y}\, d\eta \int_{P_0-i\infty}^{P_0+i\infty} \frac{\tilde f(\eta,p)e^{-x\sqrt{p+\eta^2}}\, e^{pt}\, dp}{\sum_{k=1}^{n}(-1)^k \alpha_k (p+\eta^2)^{\frac{1}{2}k} + \sum_{k=1}^{n}(i\eta)^k \beta_k}. \tag{27}$$

Знаменатель подинтегральной функции внутреннего интеграла (27) имеет n нулей относительно p. Обозначим их через $p_1, p_2, ..., p_n$, среди них могут быть кратные. Максимальную кратность обозначим через $m \le n$. Мнимые части этих корней обозначим соответственно

$$p^1, p^2, ..., p^n.$$

Для получения требуемой оценки поступим следующим образом. Разобьем внутренний интеграл (27) на следующие слагаемые

$$\int\limits_{P_0-i\infty}^{P_0+i\infty} V(x,\eta,p)\,e^{Pt}dp = \int\limits_{P_0-i\infty}^{P_0+ip'-i\delta} V(x,\eta,p)\,e^{Pt}dt + \int\limits_{P_0+ip-i\delta}^{P_0+ip'+i\delta} V(x,\eta,p)\,e^{Pt}dp +$$

$$+ \int\limits_{P_0+ip'+i\delta}^{P_0+ip^2-i\delta} V(x,\eta,p)\,e^{Pt}dp + \ldots + \int\limits_{P_0+ip^n-i\delta}^{P_0+ip^n+i\delta} V(x,\eta,p)\,e^{Pt}dp + \int\limits_{P_0-ip^n+i\delta}^{P_0+i\infty} V(x,\eta,p)\,e^{Pt}dp,$$

где $\delta > 0$.

Таким образом, мы получим сумму интегралов двух типов: интегралов, пределы интегрирования которых содержат особенность подинтегрального выражения, и интегралы, не содержащие особенностей.

При оценке интегралов первого типа будем пользоваться априорным неравенствам (6), а при оценке интегралов второго типа воспользуемся следующим соотношением

$$\left|\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\alpha_k(p+\eta^2)^{\frac{1}{2}k} + \sum_{k=1}^{n}(i\eta)^k\beta_k\right| > c_2\delta. \tag{29}$$

В случае m – кратного корня оценка многочлена принимает вид:

$$\left|\sum_{k-1}^{n}(-1)^k\alpha_k(p+\eta^2)^{\frac{1}{2}k} + \sum_{k=1}^{n}(i\eta)^k\beta_k\right| > c_2\delta^m. \tag{30}$$

Вначале с учетом (12) оценим следующий интеграл

$$\left|\int\limits_{P_0-ip^1\ i\delta}^{P_0+ip'+i\delta} V(x,\eta,p)\,e^{Pt}dt\right| \le \left|\int\limits_{P_0+ip'-i\delta}^{P_0+ip'+i\delta} |V(x,\eta,p)|\,|e^{Pt}|\,dp\right| \le \frac{4\delta M\,e^{P_0t}\pi}{P_0(\eta^2+1)}. \tag{31}$$

В случае отсутствия кратных корней таких слагаемых будет n.

Далее оценим другой интеграл. Используя (28), (29) имеем

$$\left|\int\limits_{P_0-i\infty}^{P_0+ip^1-i\delta} \frac{\tilde{f}(\eta,p)\,e^{pt}e^{-x\sqrt{p+\eta^2}}\,dp}{\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^k\alpha_k(p+\eta^2)^{\frac{1}{2}k} + \sum\limits_{k=1}^{n}(i\eta)^k\beta_k}\right| \le \left|\int\limits_{P_0-i\infty}^{P_0+ip^1-i\delta} \frac{|\tilde{f}(\eta,p)|\,|e^{pt}|\,|e^{-x\sqrt{p+\eta^2}}|\,dp}{\left|\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^k\alpha_k(p+\eta^2)^{\frac{1}{2}k} + \sum\limits_{k-1}^{n}(i\eta)^k\beta_k\right|}\right| \le$$

$$\le \frac{e^{P_0t}c_1\varepsilon}{P_0c_2\delta}\int\limits_{-\infty}^{P^1-\delta} e^{-\alpha(|\eta|+|s|)^{1/2}}\,)\,ds \le \frac{4\sqrt{8}\,e^{P_0t}\varepsilon\, e^{-\frac{x}{\sqrt{8}}|\eta|}}{P_0c_2x^2\delta}. \tag{32}$$

Оценка (32) получена так же, как и (18).

В случае отсутствия кратных корней таких слагаемых, как (31), будет $n+1$. Из (27) с учетом (29) и (14) имеем

$$|u(x,y,t)| \le \frac{4M\delta\,e^{P_0t}\pi}{P_0} + \frac{\varepsilon\,D(x)\,e^{P_0t}(n+1)}{\delta}, \tag{33}$$

где $$D(x) = \frac{4\sqrt{2}\,\pi}{P_0c_2x^3}.$$

Выберем δ таким образом, чтобы выполнялось равенство

$$\frac{4n\pi\delta\,e^{P_0t}}{P_0} = \frac{\varepsilon\,D(x)\,e^{P_0t}(n+1)}{\delta}. \tag{34}$$

Подставив в (33) найденное из (34) и окончательно получим

$$|\, u(x,\, y,\, t)| \le c(x,\, t)\, \varepsilon^{1/2}\, M^{1/2}\, [n\,(\, n+1)]^{1/2},$$

где $c(x,\, t) = 4p_0 D^{1/2}(x)\; e^{P_0 t}$.

Рассмотрим случай наличия кратных корней. Не умоляя общности, предположим, что один из корней имеет кратность m, в этом случае оценка (33) запишется в виде

$$|\, u(x,\, y,\, t)| \le \frac{4(n-m)M\delta\, e^{P_0 t}}{P_0} + \frac{\varepsilon\, D(x)\, e^{P_0 t}(n+1-m)}{\delta^m}.$$

После выбора оптимального δ получим

$$|\, u(x,\, y,\, t)| \le c(x,\, t)\, \varepsilon^{1/m+1}\, M^{1-\frac{1}{m+1}},$$

где $c(x,\, t) = 8(n-m)\, D^{1/m+1}(x)\; e^{P_0 t}$.

Теорема доказана.

Литература

1. *Загорский Т.Я.* Смешанные задачи для систем дифференциальных уравнений с частными производными параболического типа. – Львов, 1961.
2. *Михайлов В.П.* Решение смешанной задачи для параболической системы методом потенциалов. – ДАН СССР, 132, 1960. – № 2.
3. *Тихонов А.Н.* О краевых условиях, содержащих производные порядка, превышающего порядок уравнения // Математический сборник, т. 26. – 1950. – № 1.
4. *Эйдельман С.Д.* Параболические системы. – М.: Наука, 1964.

С.К. Кыдыралиев,

к.ф.-м.н., доцент, ассоц. профессор направления «Естественные науки и информационные технологии», Американский университет в Центральной Азии

От барона Мюнхгаузена к ипотеке: задачи ипотечного кредитования на языке разностных уравнений

В последнее время много говорится об ипотеке, но не все знают, что существуют различные типы ипотеки. Еще меньшее количество людей знают, как правильно рассчитать схему погашения ипотечного кредита. Недвижимость трудно купить, так как она обычно дорого стоит. Для дорогих покупок можно взять кредит, но для получения большого кредита нужен солидный залог. Эта проблема решилась, когда в чью-то светлую голову пришла замечательная мысль совместить по времени две операции: