Таким образом, в первом периоде при доходе в $1000 потребитель должен занять $936,55 под 10% годовых, и это позволит ему потреблять товары на общую сумму $1936,55. Если во втором периоде он займет 966,75 долларов, то он сможет потреблять во втором периоде товары на 1936,55 долларов, и остаток на третий период равен $1936,55.

Литература

1. *Лутц Крушвиц.* Финансирование и инвестиции. – СПб.: Питер, 2000
2. Словарь современной экономической теории / Под общ. ред Дэвида У. Пирса. – Москва: ИНФРА-М, 1997.
3. *Chiang, A.,* Fundamental Methods of Mathematical Economics. New York: McGraw-Hill, 1992
4. *Hal R.* Varian- Intermediate Microeconomics. A modern Approach. Third Edition. University of Michigan, 1987.

С.Н. Скляр
профессор, руководитель направления «Естественные науки и информационные технологии»,
Американский университет в Центральной Азии

О.С. Хлыбов
аспирант,
Кыргызско-Российский Славянский университет

Разностные схемы для решения задач теплопереноса в различных системах координат

Введение

Рассмотрим уравнение:

$$\frac{\varepsilon^2}{x^\lambda}\cdot\frac{d}{dx}\left(x^\lambda\frac{du}{dx}\right)-q(x)u=f(x),\quad x\in(0,1); \tag{1}$$

в котором λ и ε параметры, удовлетворяющие условиям: $\lambda \geq 0$, $0<\varepsilon\leq 1$; функции $q(x)$, $f(x)$ заданы и, по крайней мере, непрерывны на отрезке $[0,1]$, причем: $q(x)\geq 0$. Уравнения вида (1) возникают во многих классических задачах теплопереноса: решая уравнение стационарной теплопроводности

$$\Delta u - qu = f \tag{2}$$

в шаре радиусом r, в случае центральной сферической симметрии, приходим к уравнению (1) с $\lambda = 2$, $\varepsilon = 1/r$. Если уравнение (2) рассматривается в цилиндре с радиусом r и решение обладает свойством осевой симметрии, то получаем уравнение (1) с $\lambda = 1$, $\varepsilon = 1/r$ [5, 7]. При $\lambda = 0$ уравнение (1) используется при моделировании процесса диффузионно-реактивного переноса в декартовой системе координат.

Характерной особенностью уравнения (1) является обращение в нуль коэффициента x^λ на левом конце интервала (0,1), в котором ищется решение. Эта особенность играет важную роль при постановке краевых задач для уравнения (1): в случае $\lambda \ge 1$ не будем задавать значение решения при x=0, а лишь потребуем его ограниченности: $|u(0)| < +\infty$. Таким образом, для $\lambda \ge 1$ будем рассматривать задачу:

$$\begin{cases} \dfrac{\varepsilon^2}{x^\lambda}\cdot\dfrac{d}{dx}\left(x^\lambda \dfrac{du}{dx}\right) - q(x)u = f(x), \quad x \in (0,1),\ \lambda \ge 1; \\ |u(0)| < +\infty, \ \ \xi u(1) + \eta\varepsilon u'(1) = \psi. \end{cases} \tag{3}$$

Рассуждая по аналогии с [5, с. 619], можно доказать справедливость следующего предельного перехода для решения задачи (3):

$$\lim_{x\to 0}\left[x^\lambda \cdot u'(x)\right] = 0. \tag{4}$$

Из уравнения (1) и соотношения (4) легко получить представление для производной:

$$u'(x) = \frac{1}{\varepsilon^2 x^\lambda}\int_0^x s^\lambda\left[f(s) + q(s)u(s)\right]ds, \tag{5}$$

которое, в свою очередь, позволяет доказать следующую оценку для решения задачи (3):

$$|u'(x)| \le C\cdot x, \ \ x \in (0,1). \tag{6}$$

При $0 \le \lambda < 1$ условие ограниченности решения на левом конце интервала (0,1) заменим условием первого рода и будем рассматривать классическую задачу:

$$\begin{cases} \dfrac{\varepsilon^2}{x^\lambda}\cdot\dfrac{d}{dx}\left(x^\lambda \dfrac{du}{dx}\right) - q(x)u = f(x), \quad x \in (0,1),\ 0 \le \lambda < 1; \\ u(0) = \rho, \ \ \xi u(1) + \eta\varepsilon u'(1) = \psi. \end{cases} \tag{7}$$

Заметим, что в задачах (3) и (7) при x=1 ставится общее краевое условие (условие третьего рода), для коэффициентов которого мы предполагаем выполненными неравенства: $\xi \ge 0$, $\eta \ge 0$, $\xi + \eta > 0$. В настоящей работе будем обсуждать вопросы численного решения задач (3) и (7), поэтому будем считать, что их аналитические решения существуют и принадлежат классу $\mathbb{C}^1(0,1) \cap \mathbb{C}^2(0,1)$.

Когда ε достаточно мало, решения задач (3) и (7) могут сформировать пограничный слой у правого конца отрезка x=1, а в случае задачи (7), пограничный слой может возникнуть и у левого конца отрезка x=0. Численное решение таких задач (их называют сингулярно возмущенными) обычно требует использования специальных разностных схем, гарантирующих равномерную (по ε) сходимость приближенного решения к точному [1]. Разностные схемы для решения задачи (3) в случаях $\lambda = 1$ и $\lambda = 2$ (для η = 0, ξ =1,) были построены на основе интегро-интерполяционного метода А.А. Самарским [3]. Необходимо отметить также работы И.В. Фрязинова [6] и G. Stoyan [9], в которых рассмотрены случаи λ = 0,1,2 и условие Дирихле (ξ =1, η = 0) на правом конце отрезка. Разностные схемы для решения задачи (3) в полной постановке и сферической системе координат (λ = 2) были построены в [2].

В настоящей работе используется методика, предложенная в [4, 8] и обобщающая интегро-интерполяционный метод А.А. Самарского, поэтому она условно названа «проекционным вариантом интегро-интерполяционного метода» (ПВИИМ). Этот метод, на наш взгляд, позволяет достаточно эффективно учитывать специфику исходной дифференциальной задачи, кроме того, он дает возможность одновременного вычисления как решения задачи, так и его производных.

Построение разностной схемы для задачи (3)

На отрезке [0,1] рассмотрим произвольную, вообще говоря, неравномерную сетку.

$$0 = x_1 < x_2 < \dots < x_i < x_n = 1$$

с «шагами» $h_i = x_{i+1} - x_i$, i = 1, 2, ..., n – 1. Дифференциальное уравнение (1) умножим на $x^\lambda v(x)$, где $v(x)$ – некоторая достаточно гладкая функция (назовем ее «тестовой» функцией); результат проинтегрируем по сеточной ячейке $[x_i, x_{i+1}]$ при i = 2, 3, ... n – 1 (ближайшая к левой границе сеточная ячейка $[x_1, x_2]$ будет рассматриваться отдельно), в том числе и «по частям», в итоге получим:

$$\left(\varepsilon\varphi v - \varepsilon^2 u \cdot x^\lambda v'\right)_{x_i}^{x_{i+1}} + \varepsilon^2 \int_{x_i}^{x_{i+1}} u \frac{d}{dx}\left(x^\lambda \frac{dv}{dx}\right) dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} (f + qu) x^\lambda v dx. \qquad (8)$$

В (8) принято обозначение: $\varphi = \varepsilon x^\lambda u'(x)$. В соответствии с принципом ПВИИМ, на каждой сеточной ячейке выберем две тестовые функции $v^{(0)}(x)$ *и* $v^{(1)}(x)$ как решения следующих задач:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx}\left(x^\lambda \dfrac{dv^{(0)}}{dx}\right) = 0, \ x \in (x_i, x_{i+1}); \\ v^{(0)}(x_i) = 1, \ v^{(0)}(x_{i+1}) = 0. \end{cases} \qquad (9)$$

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx}\left(x^\lambda \dfrac{dv^{(1)}}{dx}\right) = 0, \ x \in (x_i, x_{i+1}); \\ v^{(1)}(x_i) = 0, \ v^{(1)}(x_{i+1}) = 1. \end{cases} \qquad (10)$$

Решения задач (9) и (10) легко записать в явной форме. Действительно, для λ = 1:

$$v^{(0)}(x) = \frac{\ln(x/x_{i+1})}{\ln(x_i/x_{i+1})}, \quad v^{(1)}(x) = \frac{\ln(x/x_i)}{\ln(x_{i+1}/x_i)}. \qquad (11)$$

В случае $\lambda \neq 1$ получим:

$$v^{(0)}(x) = \frac{x_{i+1}^{1-\lambda} - x^{1-\lambda}}{x_{i+1}^{1-\lambda} - x_i^{1-\lambda}}, \quad v^{(1)}(x) = \frac{x^{1-\lambda} - x_i^{1-\lambda}}{x_{i+1}^{1-\lambda} - x_i^{1-\lambda}}. \qquad (12)$$

Подставляя (11) в (8), для случая λ = 1 приходим к соотношениям (i = 2, 3,... n–1)

$$-\varepsilon\varphi_i - \varepsilon^2 \frac{u_{i+1} - u_i}{\ln(x_i / x_{i+1})} = \int_{x_i}^{x_{i+1}} (f + qu) x v^{(0)} dx, \qquad (13)$$

$$\varepsilon\varphi_{i+1} + \varepsilon^2 \frac{u_{i+1} - u_i}{\ln(x_i / x_{i+1})} = \int_{x_i}^{x_{i+1}} (f + qu) x v^{(1)} dx, \qquad (14)$$

где $u_i = u(x_i)$, $\varphi = \varphi(x_i)$. Осталось выбрать квадратурные формулы для вычисления интегралов в правых частях соотношений (13) и (14). Остановимся на следующем варианте:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}}(f+qu)xv^{(0)}dx \approx (f_i+q_iu_i)\int_{x_i}^{x_{i+1}}xv^{(0)}dx = -\frac{1}{2}(f_i+q_iu_i)\left[x_i^2+\frac{h_ix_{i+1/2}}{ln(x_i/x_{i+1})}\right] \quad (15)$$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}}(f+qu)xv^{(1)}dx \approx (f_{i+1}+q_{i+1}u_{i+1})\int_{x_i}^{x_{i+1}}xv^{(1)}dx = \frac{1}{2}(f_{i+1}+q_{i+1}u_{i+1})\left[x_{i+1}^2+\frac{h_ix_{i+1/2}}{ln(x_i/x_{i+1})}\right], \quad (16)$$

где

$$q_i = q(x_i),\ f_i = f(x_i),\ x_{i+1/2} = (x_i+x_{i+1})/2.$$

Пусть теперь $\lambda \neq 1$, подставим (12) в (8), в результате получим:

$$-\varepsilon\varphi_i + \varepsilon^2(1-\lambda)\frac{u_{i+1}-u_i}{x_{i+1}^{1-\lambda}-x_i^{1-\lambda}} = \int_{x_i}^{x_{i+1}}(f+qu)x^\lambda v^{(0)}dx, \quad (17)$$

$$\varepsilon\varphi_{i+1} - \varepsilon^2(1-\lambda)\frac{u_{i+1}-u_i}{x_{i+1}^{1-\lambda}-x_i^{1-\lambda}} = \int_{x_i}^{x_{i+1}}(f+qu)x^\lambda v^{(1)}dx\,. \quad (18)$$

Квадратурные формулы для вычисления интегралов в правых частях соотношений (17), (18) выбираем по аналогии с формулами (15), (16):

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}}(f+qu)x^\lambda v^{(0)}dx \approx -\frac{1}{1+\lambda}(f_i+q_iu_i)\left[x_i^{1+\lambda}-h_ix_{i+1/2}\cdot\frac{1-\lambda}{x_{i+1}^{1-\lambda}-x_i^{1-\lambda}}\right], \quad (19)$$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}}(f+qu)x^\lambda v^{(1)}dx \approx \frac{1}{1+\lambda}(f_{i+1}+q_{i+1}u_{i+1})\left[x_{i+1}^{1+\lambda}-h_ix_{i+1/2}\cdot\frac{1-\lambda}{x_{i+1}^{1-\lambda}-x_i^{1-\lambda}}\right]. \quad (20)$$

Будем считать, что $\lambda > 1$ и рассмотрим ближайшую к левой границе сеточную ячейку $[x_1\ x_2]=[0, h_1]$, определим на ней тестовую функцию $v^{(0)}(x)$ из соотношений:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx}\left(x^\lambda\dfrac{dv^{(0)}}{dx}\right)=0,\ x\in(0,x_2); \\ x^{\lambda-1}v^{(0)}(x)\Big|_{x=0}=1,\ x^{\lambda-1}v^{(0)}(x)\Big|_{x=x_2}=0; \end{cases} \quad (21)$$

а функцию $v^{(1)}(x)$ как решение следующей задачи:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx}\left(x^\lambda\dfrac{dv^{(1)}}{dx}\right)=0,\ x\in(0,x_2); \\ x^{\lambda-1}v^{(1)}(x)\Big|_{x=0}=0,\ x^{\lambda-1}v^{(0)}(x)\Big|_{x=x_2}=1. \end{cases} \quad (22)$$

Решения задач (21) и (22) легко находим:

$$v^{(0)}(x) = x^{1-\lambda}-x_2^{1-\lambda},\ v^{(1)}(x) = x_2^{1-\lambda}. \quad (23)$$

Подставляя функции (23) в интегро-разностное тождество (8) и используя квадратурные формулы, аналогичные формулам (19), (20), получим следующие разностные уравнения на сеточной ячейке $[x_1, x_2]$:

$$\varepsilon^2 \cdot \frac{u_2^h - u_1^h}{h_1} = \frac{h_1}{2(1+\lambda)} \cdot \left(f_1 + q_1 u_1^h\right), \quad \varepsilon\varphi_2^h = \frac{h_1^{1+\lambda}}{1+\lambda} \cdot \left(f_2 + q_2 u_2^h\right). \tag{24}$$

Здесь и далее, символами u_i^h, φ_i^h $(i = 1, 2, ..., n)$ обозначены приближенные значения искомых величин $u(x_i)$, $\varphi(x_i)$ соответственно.

Для случая $\lambda = 1$ на ячейке $[x_1, x_2]$ рассмотрим две линейно независимые тестовые функции следующего вида:

$$v^{(0)}(x) = -ln\left(\frac{x}{x_2}\right), \quad v^{(1)}(x) = 1. \tag{25}$$

Подставляя функции (25) в интегро-разностное тождество (8) и используя квадратурные формулы, аналогичные формулам (15), (16), получим разностные уравнения на сеточной ячейке $[x_1, x_2]$

$$\varepsilon^2 \cdot \frac{u_2^h - u_1^h}{h_1} = \frac{h_1}{4} \cdot \left(f_1 + q_1 u_1^h\right), \quad \varepsilon\varphi_2^h = \frac{h_1^2}{2} \cdot \left(f_2 + q_2 u_2^h\right). \tag{26}$$

Отметим, что при выводе первых уравнений в 24 и (26), мы воспользовались свойством (6) решения задачи (3). Собирая воедино формулы (17)–(20) и добавляя уравнения (24), получаем разностную схему для решения задачи (3) в случае $\lambda > 1$:

$$\begin{cases} \varepsilon^2 \cdot \dfrac{u_2^h - u_1^h}{h_1} = \dfrac{h_1}{2(1+\lambda)} \cdot \left(f_1 + q_1 u_1^h\right), \quad \varepsilon\varphi_2^h = \dfrac{h_1^{1+\lambda}}{1+\lambda} \cdot \left(f_2 + q_2 u_2^h\right), \\ \varepsilon\varphi_i^h + \varepsilon^2(\lambda - 1) \cdot \dfrac{u_{i+1}^h - u_i^h}{x_{i+1}^{1-\lambda} - x_i^{1-\lambda}} = \dfrac{1}{1+\lambda}(f_i + q_i u_i^h)\left[x_i^{1+\lambda} + h_i x_{i+1/2} \cdot \dfrac{\lambda - 1}{x_{i+1}^{1-\lambda} - x_i^{1-\lambda}}\right], \\ \varepsilon\varphi_{i+1}^h + \varepsilon^2(\lambda - 1) \cdot \dfrac{u_{i+1}^h - u_i^h}{x_{i+1}^{1-\lambda} - x_i^{1-\lambda}} = \dfrac{1}{1+\lambda}(f_{i+1} + q_{i+1} u_{i+1}^h)\left[x_{i+1}^{1+\lambda} + h_i x_{i+1/2} \cdot \dfrac{\lambda - 1}{x_{i+1}^{1-\lambda} - x_i^{1-\lambda}}\right], \\ i = 2, 3, ..., n-1; \quad \xi u_n^h + \eta\varphi_n^h = \psi. \end{cases} \tag{27}$$

В свою очередь, соотношения (13)–(16) и (26) приводят к разностной схеме для решения задачи (3) при $\lambda = 1$:

$$\begin{cases} \varepsilon^2 \cdot \dfrac{u_2^h - u_1^h}{h_1} = \dfrac{h_1}{4} \cdot \left(f_1 + q_1 u_1^h\right), \quad \varepsilon\varphi_2^h = \dfrac{h_1}{2} \cdot \left(f_2 + q_2 u_2^h\right), \\ \varepsilon\varphi_i^h + \varepsilon^2 \dfrac{u_{i+1}^h - u_i^h}{ln(x_i / x_{i+1})} = \dfrac{1}{2}(f_i + q_i u_i^h)\left[x_i^2 + \dfrac{h_i x_{i+1/2}}{ln(x_i / x_{i+1})}\right], \\ \varepsilon\varphi_{i+1}^h + \varepsilon^2 \dfrac{u_{i+1}^h - u_i^h}{ln(x_i / x_{i+1})} = \dfrac{1}{2}(f_{i+1} + q_{i+1} u_{i+1}^h)\left[x_{i+1}^2 + \dfrac{h_i x_{i+1/2}}{ln(x_i / x_{i+1})}\right], \\ i = 2, 3, ..., n-1; \quad \xi u_n^h + \eta\varphi_n^h = \psi. \end{cases} \tag{28}$$

Заметим, что в системах (27) и (28) по $2n-1$ уравнений для определения такого же количества неизвестных: u_i^h, $(i=1,2,\dots,n)$; φ_i^h $(i=2,3,\dots,n)$; величина φ_1^h определена в силу свойства (4) решения задачи (3).

Рассмотрим функцию:

$$a_\lambda(z)=\begin{cases}\left(\dfrac{2}{1+z}\right)^\lambda \dfrac{(1-\lambda)(1-z)}{1-z^{1-\lambda}}, & \text{при } \lambda\neq 1;\\[2ex] \dfrac{2}{1+z}\cdot\dfrac{z-1}{\ln z}, & \text{при } \lambda=1,\end{cases}$$

определенную для $z\in[0,1]$. При помощи этой функции перепишем разностные схемы (27) и (28) для задачи (3) в единой форме. Опуская технические детали, приведем окончательный результат:

$$\begin{cases}\varphi_1^h=0,\\[1ex] -\varepsilon\varphi_i^h+\varepsilon^2\left(x_{i+1/2}\right)^\lambda\cdot a_\lambda\left(\dfrac{x_i}{x_{i+1}}\right)\cdot\dfrac{u_{i+1}^h-u_i^h}{h_i}=\dfrac{1}{1+\lambda}(f_i+q_iu_i^h)\left[\left(x_{i+1/2}\right)^{1+\lambda}\cdot a_\lambda\left(\dfrac{x_i}{x_{i+1}}\right)-\left(x_i\right)^{1+\lambda}\right],\\[2ex] \varepsilon\varphi_{i+1}^h-\varepsilon^2\left(x_{i+1/2}\right)^\lambda\cdot a_\lambda\left(\dfrac{x_i}{x_{i+1}}\right)\cdot\dfrac{u_{i+1}^h-u_i^h}{h_i}=\dfrac{1}{1+\lambda}(f_{i+1}+q_{i+1}u_{i+1}^h)\left[\left(x_{i+1}\right)^{1+\lambda}-\left(x_{i+1/2}\right)^{\lambda+1}\cdot a_\lambda\left(\dfrac{x_i}{x_{i+1}}\right)\right],\\[2ex] i=1,2,\dots,n-1;\quad \xi u_n^h+\eta\varphi_n^h=\psi.\end{cases}\tag{29}$$

Если нет необходимости вычислять величины потоков φ_i^h, их можно исключить из системы (29) и получить стандартную трехточечную разностную схему для определения величин u_i^h $(i=1,2,\dots,n)$:

$$\begin{cases}\varepsilon^2\cdot\dfrac{u_2^h-u_1^h}{h_1}=\dfrac{h_1}{2(1+\lambda)}\cdot\left(f_1+q_1u_1^h\right),\\[2ex] \varepsilon^2\cdot\left[\left(x_{i+1/2}\right)^\lambda a_\lambda\left(\dfrac{x_i}{x_{i+1}}\right)\dfrac{u_{i+1}^h-u_i^h}{h_i}-\left(x_{i-1/2}\right)^\lambda a_\lambda\left(\dfrac{x_{i-1}}{x_i}\right)\cdot\dfrac{u_i^h-u_{i-1}^h}{h_{i-1}}\right]=\\[2ex] \quad=\dfrac{(f_i+q_iu_i^h)}{(1+\lambda)}\left[\left(x_{i+1/2}\right)^{\lambda+1}\cdot a_\lambda\left(\dfrac{x_i}{x_{i+1}}\right)-\left(x_{i-1/2}\right)^{\lambda+1}\cdot a_\lambda\left(\dfrac{x_{i-1}}{x_i}\right)\right],\ i=2,3,\dots,n-1;\\[2ex] \xi u_n^h+\eta\left\{\varepsilon\left(x_{n-1/2}\right)^\lambda\cdot a_\lambda\left(x_{n-1}\right)\cdot\dfrac{u_n^h-u_{n-1}^h}{h_{n-1}}+\dfrac{(f_n+q_nu_n^h)}{\varepsilon(1+\lambda)}\left[1-\left(x_{n-1/2}\right)^{\lambda+1}\cdot a_\lambda\left(x_{n-1}\right)\right]\right\}=\psi.\end{cases}\tag{30}$$

Разностная схема для задачи (7)

В случае задачи (7) полностью сохраняются соотношения (17), (18) и (19), (20), причем их можно рассматривать и на приграничной сеточной ячейке $[x_1, x_2]$. В результате приходим к системе $2n$ разностных уравнений для определения $2n$ неизвестных u_i^h, φ_i^h $(i = 1,2,\ldots,n)$:

$$\begin{cases} u_1^h = \rho, \\ \varepsilon\varphi_i^h + \varepsilon^2(\lambda-1)\cdot\dfrac{u_{i+1}^h - u_i^h}{x_{i+1}^{1-\lambda} - x_i^{1-\lambda}} = \dfrac{1}{1+\lambda}(f_i + q_i u_i^h)\left[x_i^{1+\lambda} + h_i x_{i+1/2}\cdot\dfrac{\lambda-1}{x_{i+1}^{1-\lambda} - x_i^{1-\lambda}}\right], \\ \varepsilon\varphi_{i+1}^h + \varepsilon^2(\lambda-1)\cdot\dfrac{u_{i+1}^h - u_i^h}{x_{i+1}^{1-\lambda} - x_i^{1-\lambda}} = \dfrac{1}{1+\lambda}(f_{i+1} + q_{i+1}u_{i+1}^h)\left[x_{i+1}^{1+\lambda} + h_i x_{i+1/2}\cdot\dfrac{\lambda-1}{x_{i+1}^{1-\lambda} - x_i^{1-\lambda}}\right], \\ i = 1,2,\ldots,n-1; \quad \xi u_n^h + \eta\varphi_n^h = \psi. \end{cases} \tag{31}$$

Система (31), после определения значений решения u_i^h, позволяет вычислять приближенные величины потоков: $\varphi_i^h \approx \varepsilon x_i^\lambda u'(x_i)$. Отметим, что решение задачи (7) обладает особенностью в окрестности левой границы области: $u'(x) = O\left(x^{-\lambda}\right)$ при $x \to 0$, что учитывается системой (31). Исключая величины φ_i^h из системы (31) получим разностную схему для определения значений u_i^h $(i = 1,2,\ldots,n)$ решения задачи (7) в узлах сетки:

$$\begin{cases} u_1^h = \rho, \\ \varepsilon^2\cdot\left[\left(x_{i+1/2}\right)^\lambda a_\lambda\left(\dfrac{x_i}{x_{i+1}}\right)\cdot\dfrac{u_{i+1}^h - u_i^h}{h_i} - \left(x_{i-1/2}\right)^\lambda a_\lambda\left(\dfrac{x_{i-1}}{x_i}\right)\cdot\dfrac{u_i^h - u_{i-1}^h}{h_{i-1}}\right] = \\ \quad = \dfrac{(f_i + q_i u_i^h)}{(1+\lambda)}\left[\left(x_{i+1/2}\right)^{\lambda+1} a_\lambda\left(\dfrac{x_i}{x_{i+1}}\right) - \left(x_{i-1/2}\right)^{\lambda+1}\cdot a_\lambda\left(\dfrac{x_{i-1}}{x_i}\right)\right],\ i = 2,3,\ldots,n-1; \\ \xi u_n^h + \eta\left\{\varepsilon\left(x_{n-1/2}\right)^\lambda\cdot a_\lambda(x_{n-1})\ \dfrac{u_n^h - u_{n-1}^h}{h_{n-1}} + \dfrac{(f_n + q_n u_n^h)}{\varepsilon(1+\lambda)}\left[1 - \left(x_{n-1/2}\right)^{\lambda+1}\cdot a_\lambda(x_{n-1})\right]\right\} = \psi \end{cases} \tag{32}$$

Численные эксперименты

В настоящем разделе представлены результаты численных экспериментов, иллюстрирующие работу предложенных разностных схем (схем ПВИИМ) и позволяющие сравнить их с ранее известными методами решения рассматриваемых задач. С этой целью рассмотрим задачу (3), полагая:

$$q(x) \equiv 1,\ f(x) \equiv 4,\ \xi = 2,\ \eta = 0,\ \psi = 5. \tag{33}$$

В условиях (33) (задача Дирихле на правой границе области) мы можем для сравнения рассмотреть разностную схему, предложенную А.А.Самарским: для случая $\lambda = 1$ см. [3, с. 172]; при $\lambda = 2$ см. [3, с. 179]. Фиксируя параметр $\varepsilon = 0{,}1$ и изменяя число узлов сетки "n", проиллюстрируем процесс сходимости разностных схем: результаты расчетов представлены в таблице 1 (для $\lambda = 1$) и таблице 2 (для $\lambda = 2$). Роль критерия качества разностной схемы для нас играет величина относительной погрешности:

$$E = \frac{\max\limits_{0\le i\le n}\left|u(x_i) - u_i^h\right|}{\max\limits_{0\le i\le n}\left|u(x_i)\right|}\cdot 100\%,$$

при этом в качестве значений точного решения $u(x)$ во всех расчетах мы используем значения приближенного решения, вычисленные при помощи схем (30) или (32) на сетке с достаточно мелким шагом (n ~1000).

Таблица 1

Динамика погрешности E при увеличении числа узлов сетки. Задача (3), (33), для $\varepsilon = 0{,}1$; $\lambda = 1$

Схема \ n	8	16	32	54	60
А.А. Самарского	7,760	2,062	0,780	0,212	0,199
ПВИИМ (30)	7,677	2,041	0,773	0,210	0,197

Таблица 2

Динамика погрешности E при увеличении числа узлов сетки. Задача (3), (33), для $\varepsilon = 0{,}1$; $\lambda = 2$

Схема \ n	8	16	32	54	60
А.А. Самарского	8,910	2,368	0,595	0,245	0,184
ПВИИМ (30)	8,748	2,326	0,584	0,240	0,181

Результаты, представленные в таблицах 1 и 2, говорят о наличии сходимости разностной схемы (30) и схемы Самарского, причем, величины E относительных погрешностей для предложенной в настоящей работе схемы (30) меньше, чем для схемы Самарского.

Таблица 3

Динамика погрешности E при уменьшении параметра ε. Задача (3), (33), для $n = 16$; $\lambda = 1$

Схема \ ε	1	0,5	0,1	0,05	0,01	0,005	0,001
А.А. Самарского	0,042	0,283	2,062	6,920	3,418	0,936	0,038
ПВИИМ (30)	0,037	0,252	2.041	6,901	3,416	0,935	0,038

Эффект возникновения пограничного слоя и его влияния на точность разностных схем иллюстрирует таблица 3, в которой отражены изменения относительных погрешностей E при фиксированном значении числа узлов сетки (n=16) и уменьшении величины параметра ε, который «отвечает» за ширину пограничного слоя [1]. Возникновение пограничного слоя в задаче (3) (изменение параметра ε от 1 до 0,05) влечет ухудшение работы разностных схем, что приводит к увеличению относительных погрешностей. Дальнейшее уменьшение ширины пограничного слоя (изменение параметра ε от 0,01 до 0,001) приводит к обратному эффекту: уменьшению относительных погрешностей. Однако этот эффект не говорит об улучшении работы разностных схем, а связан с тем, что на сетке с 16 узлами пограничный слой перестает «разрешаться» вычислительной сеткой; наглядно это представлено на рисунке 1. Эта проблема присуща всем разностным схемам, использующим равномерную сетку, даже обладающим равномерной по ε сходимостью [1]; ее решение возможно, если использовать механизм адаптации сетки, встроенный в алгоритм решения задачи.

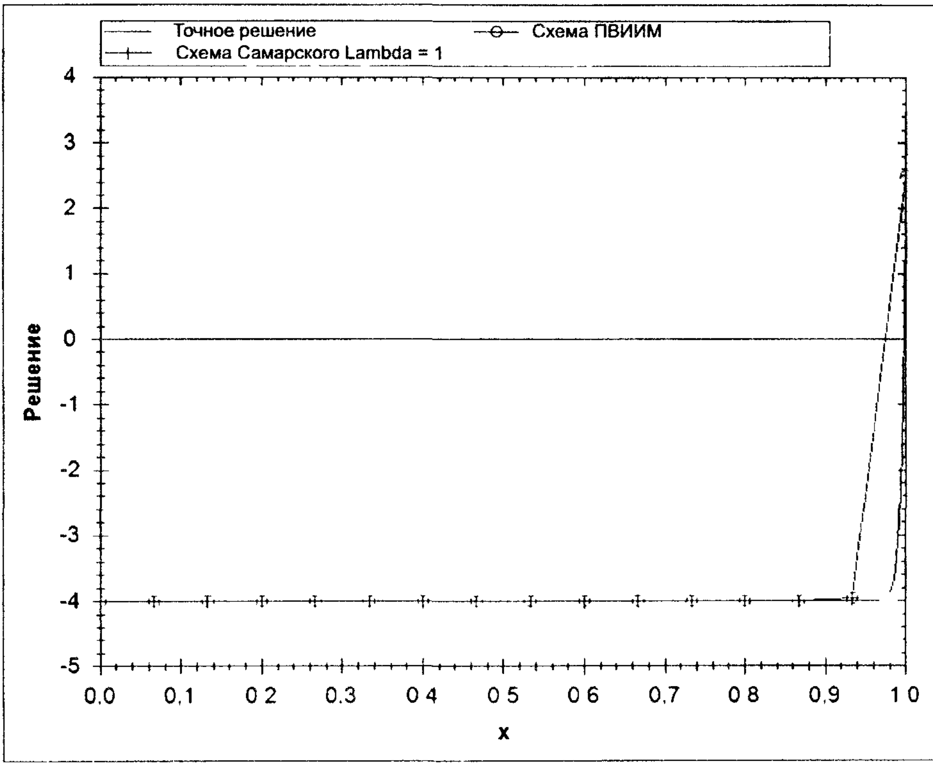

Рис. 1. Эффект пограничного слоя. Задача (3), (33), для $n = 16$; $\lambda = 1$, $\varepsilon = 0{,}005$

В таблице 4 представлены результаты расчетов с использованием схемы (30) при решении задачи (3) в случае $\lambda = 2$ и

$$q(x) \equiv 1,\ f(x) \equiv 4,\ \xi = 2,\ \eta = 1,\ \psi = 10, \tag{34}$$

а также схемы (32) для задачи (7) при $\lambda = 0{,}5$ и $\lambda = 0$, $\rho = -5$ и значениях (34) для остальных данных задачи. Это задачи с краевыми условиями третьего рода на правой границе области, для решения которых схема Самарского не приспособлена. Динамика погрешностей при фиксированном значении параметра $\varepsilon = 0{,}1$ и изменяющемся числе узлов вычислительной сетки, представленных в таблице 4, иллюстрирует сходимость новых разностных схем во всех рассматриваемых случаях.

Таблица 4

Динамика погрешности E при увеличении числа узлов сетки. Задачи (3) и (7), для ε = 0,1 и в условиях (34)

λ	Схема \ n	8	16	32	54	60
2	ПВИИМ (30)	17,7099	4,4549	1,08	0,3715	0,2998
0,5	ПВИИМ (32)	20,3113	5,0802	1,2298	0,423	0,3413
0	ПВИИМ (32)	21,2689	5,3127	1,2857	0,4421	0,3568

В заключение представим графики точных и приближенных решений задачи (7) при следующих значениях параметров:

$$q(x) \equiv 1,\ f(x) \equiv -1,\ \varepsilon = 0{,}05;\ \lambda = 0{,}5;\ \xi = 0,\ \eta = 1,\ \psi = 10,\ \rho = -5\ . \quad (35)$$

Отметим, что, в силу (35), граничное условие в точке x=1 является условием Неймана и обычно плохо аппроксимируется. Задача решалась методом (32) при двух различных значениях: n= 8 (рис. 2) и n=20 (рис. 3). Графики иллюстрируют наличие двух пограничных слоев и сходимость разностного решения.

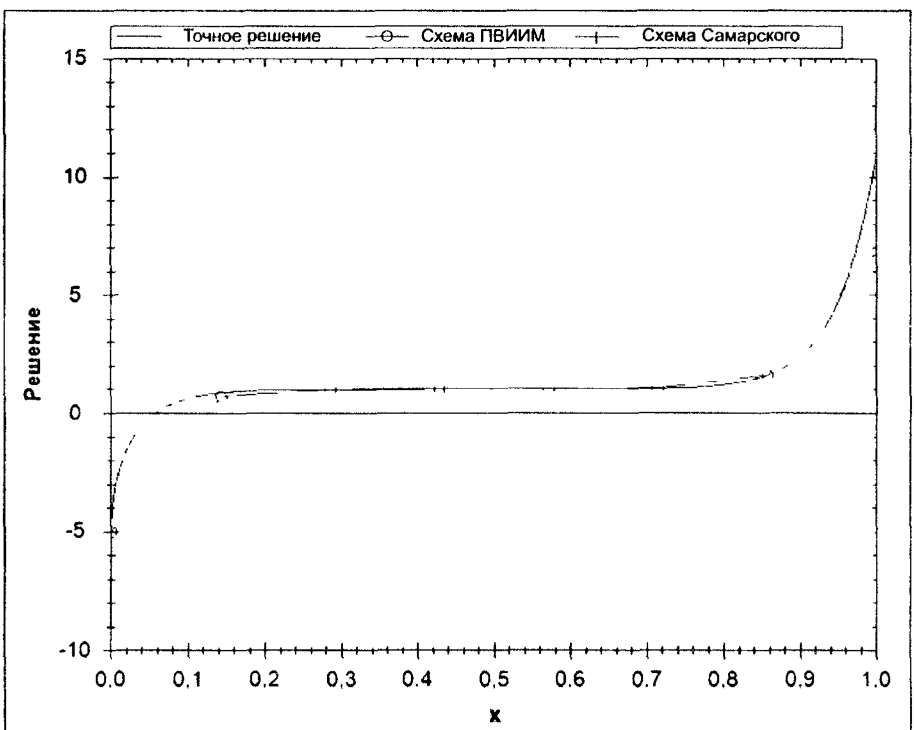

Рис. 2. Задача (7), (35). Приближенное решение методом (32) при n=8

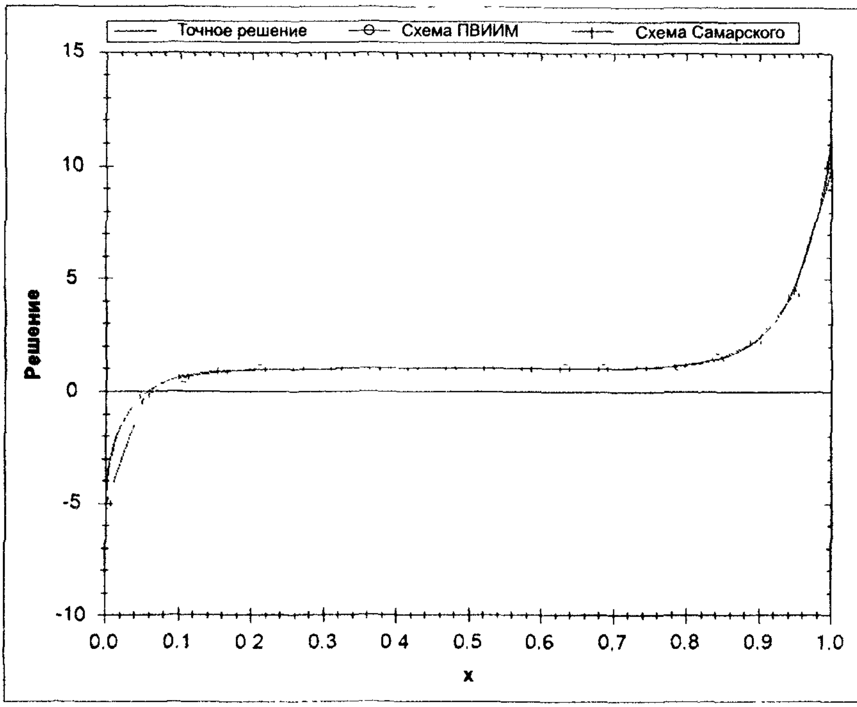

Рис. 3. Задача (7), (35). Приближенное решение методом (32) при n=20

Литература

1. *Дулан Э., Миллер Дж., Шилдерс У.* Равномерные численные методы решения задач с пограничным слоем. – М.: Мир, 1983. – 200 с.
2. *Рафатов И.Р., Скляр С.Н.* Разностные схемы для сингулярно возмущенных краевых задач, возникающих при решении эллиптических уравнений со свойством сферической симметрии // Журнал вычислительной математики и математической физики. – Т. 42. – 2002. – № 5. – С. 1383–1393.
3. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. – М.: Наука, 1983. – 616 с.
4. *Скляр С.Н., Бакиров Ж.Ж.* Проекционный метод построения разностных схем для задач с пограничными слоями // Изв. НАН Кыргызской Республики. Эхо науки. – 1997. – № 2-3. – С. 36–47.
5. *Тихонов А.Н.,Самарский А.А.* Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1966. – 724 с.
6. *Фрязинов И.В.* О разностных схемах для уравнения Пуассона в полярной, цилиндрической и сферической системах координат // Журнал вычислительной математики и математической физики. –Т. 18. – 1971. – № 5. – С. 1219–1228.
7. *Цой П.В.* Методы расчета задач тепло-массопереноса. – М.: Энергоатомиздат, 1984. – 413 с.
8. Sklyar S.N. A projective version of the integral-interpolation method and it's application for the discretization of the singular perturbation problems // Advanced Mathematics: Computations and Applications. Proc. Of the International Conf. AMCA-95 (Novosibirsk, Russia, 20-24 June, 1995). Ed. By A.S.Alekseev and N.S.Bakhvalov.- Novosibirsk· NCC Pablisher, 1995.- P.380-385.
9. Stoyan G. On a difference scheme for the diffusion-convection equation in several coordinate systems // Math. Models Phys. and Chem. and Numer. Meth. Realiz., Semin. Visegrad. Oct., 1982. Leipzig. – P. 142-150.