

С. Н. Скляр,

д. ф.-м. н., профессор программы
«Математика и естественные науки»,
ассоциированный вице-президент по академическим вопросам,
Американский университет в Центральной Азии,

М. А. Рылов,

научный сотрудник Института коммуникаций
и информационных технологий,
Кыргызско-Российский Славянский университет,

А. И. Комаров,

студент кафедры «Прикладная
математика и информатика»,
Кыргызско-Российский Славянский университет

Об аппроксимации уравнений движения в задачах о циркуляции жидкости в водоеме (II)

Настоящая работа является продолжением статьи [5], в которой была предложена разностная схема для вычисления горизонтальных компонент вектора скорости в математической модели циркуляции жидкости в водоеме. Разностная схема работы [5] была построена на основе специального метода дискретизации – проекционного варианта интегро-интерполяционного метода (ПВИИМ) [6] и, в рамках проведенных в [5] численных экспериментов, продемонстрировала достаточную эффективность. Однако в ситуациях, когда решение поставленной задачи формирует экмановские пограничные слои [3], и число узлов вычислительной сетки не может быть достаточно велико, эта разностная схема не гарантирует высокой точности решения на границе области. Поэтому, в настоящей работе предлагается модификация схемы [5], которая также строится на основе ПВИИМ, но с выбором тестовых функций, позволяющим более точно отразить специфику задачи.

Система уравнений движения определяет горизонтальные компоненты вектора скорости и может быть записана в виде [1,2]:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \ell \cdot v - \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial u}{\partial z} \right) = f_1(u, v), \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \ell \cdot u - \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial v}{\partial z} \right) = f_2(u, v). \end{cases} \quad (1)$$

Правые части уравнений в системе (1) включают градиенты давления, члены адвективного переноса и слагаемые, отвечающие за горизонтальную диффузию. Учет

этих величин в процессе численного решения системы (1) обычно производится с явного временного слоя или осуществляется методом последовательных приближений [1], поэтому, в настоящей работе мы будем считать функции заданными. Система (1) дополняется граничными условиями, параметризующими напряжением ветра на поверхности и трение о дно водоема:

$$\begin{cases} z = 0 : k \frac{\partial u}{\partial z} = -\tau_x, k \frac{\partial v}{\partial z} = -\tau_y, \\ z = H : k \frac{\partial u}{\partial z} = -\tau_x^b, k \frac{\partial v}{\partial z} = -\tau_y^b; \end{cases} \quad (2)$$

а также начальными условиями:

$$t = 0 : u = u_0, v = v_0. \quad (3)$$

Также, как и в работе [5], задачу (1)-(3) рассмотрим в комплексной форме:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + i\ell\theta - \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) = f(u, v), \quad 0 < z < H, t > 0; \quad t > 0 \quad (4)$$

$$\begin{cases} z = 0 : k \frac{\partial \theta}{\partial z} = -\tau, \\ z = H : k \frac{\partial \theta}{\partial z} = -\tau_b; \end{cases} \quad t > 0, \quad (5)$$

$$t = 0 : \theta = \theta_0(z), \quad 0 \leq z \leq H. \quad (6)$$

В задаче (4)-(6): $\theta = u + iv$ – комплексная скорость, кроме того, введены следующие обозначения:

$$f(u, v) = f_1(u, v) + if_2(u, v), \quad \tau = \tau_x + i\tau_y, \quad \tau_b = \tau_x^b + i\tau_y^b, \quad \theta_0(z) = u_0(z) + iv_0(z).$$

Обратимся к аппроксимации уравнения [4], с этой целью рассмотрим на отрезке произвольную неравномерную сетку $\{z_j | j = 1, 2, \dots, n\}$ с шагами $\Delta z_{j+1/2} = z_{j+1} - z_j$ ($j=1, 2, \dots, n-1$); пусть: $t_m = m \cdot \Delta t$, $m = 0, 1, \dots$ – узлы равномерной сетки с шагом Δt «по времени». Для простоты, как и в работе [5], будем считать, что в (4) $f(u, v) \equiv 0$, и l, k являются постоянными величинами, обобщение на случай переменных данных и не нулевой правой части осложнений не вызывает. В соответствии с методикой ПВИИМ, уравнение (4) умножим на произвольную «тестовую» функцию $\varphi(z, t)$, результат проинтегрируем по сеточной ячейке $[z_j, z_{j+1}] \times [t_m, t_{m+1}]$, в том числе и «по частям», в итоге получим следующее интегро-разностное тождество:

$$\int_{z_j}^{z_{j+1}} (\theta \varphi)_{t=t_m}^{t=t_{m+1}} dz - \int_{t_m}^{t_{m+1}} \left(k \frac{\partial \theta}{\partial z} \cdot \varphi - \theta \cdot k \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)_{z=z_j}^{z_{j+1}} dt = \int_{t_m}^{t_{m+1}} dt \int_{z_j}^{z_{j+1}} \theta \cdot \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} - i\ell \varphi + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \right] dz \quad (7)$$

Выберем тестовую функцию φ так, чтобы обратить в ноль интеграл в правой части (7), для этого положим:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} - i\ell \varphi + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) = 0, \quad (z, t) \in (z_j, z_{j+1}) \times (t_m, t_{m+1}). \quad (8)$$

Легко проверить, что функция

$$\varphi(z, t) = (c_1 \cdot e^{\lambda z} + c_2 \cdot e^{-\lambda z}) \cdot e^{(i\ell - k\lambda^2)t}$$

является решением уравнения (8) для любых комплексных λ, c_1, c_2 . Используя этот класс решений, на каждой сеточной ячейке построим две линейно независимых тестовых функции следующего вида:

$$\varphi_j^{(1)}(z, t) = \bar{\varphi}_j^{(1)}(z) \cdot e^{-\zeta t} \quad \varphi_j^{(2)}(z, t) = \bar{\varphi}_j^{(2)}(z) \cdot e^{-\zeta t}$$

где $\zeta = k\lambda^2 - i\ell$ и

$$\bar{\varphi}_j^{(1)}(z) = \frac{e^{\lambda(z_{j+1}-z)} - e^{-\lambda(z_{j+1}-z)}}{e^{\lambda\Delta z_{j+1/2}} - e^{-\lambda\Delta z_{j+1/2}}}, \quad \bar{\varphi}_j^{(2)}(z) = \frac{e^{\lambda(z-z_j)} - e^{-\lambda(z-z_j)}}{e^{\lambda\Delta z_{j+1/2}} - e^{-\lambda\Delta z_{j+1/2}}}.$$

Подставим $\varphi = \varphi_j^{(1)}$ в (7), в результате получим:

$$\int_{z_j}^{z_{j+1}} (\theta^{m+1} e^{-\zeta t_{m+1}} - \theta^m e^{-\zeta t_m}) \cdot \bar{\varphi}_j^{(1)} dz + \int_{t_m}^{t_{m+1}} \left\{ k \frac{\partial \theta_j}{\partial z} + k\lambda \left[th(R_{j+1/2}) \theta_j - \frac{\theta_{j+1} - \theta_j}{sh(2R_{j+1/2})} \right] \right\} \cdot e^{-\zeta t} dt = 0. \quad (9)$$

Аналогично, подставляя в (7) $\varphi = \varphi_j^{(2)}$, получим:

$$\int_{z_j}^{z_{j+1}} (\theta^{m+1} e^{-\zeta t_{m+1}} - \theta^m e^{-\zeta t_m}) \cdot \bar{\varphi}_j^{(2)} dz + \int_{t_m}^{t_{m+1}} \left\{ -k \frac{\partial \theta_{j+1}}{\partial z} + k\lambda \left[th(R_{j+1/2}) \theta_{j+1} + \frac{\theta_{j+1} - \theta_j}{sh(2R_{j+1/2})} \right] \right\} \cdot e^{-\zeta t} dt = 0. \quad (10)$$

В (9) и (10) введено обозначение: $R_{j+1/2} = \frac{\lambda\Delta z_{j+1/2}}{2}$. Так же, как и в работе [5], исключим значения потока $k \frac{\partial \theta_j}{\partial z}$ ($j=1, 2, \dots, n$) из соотношений (9) и (10). Чтобы сделать это во внутренних узлах сетки, сложим (9) и (10), предварительно заменив в (10) индекс $\langle j \rangle$ на $\langle j-1 \rangle$, в результате получим ($j=2, 3, \dots, n-1$):

$$\int_{z_j}^{z_{j+1}} (\theta^{m+1} - \theta^m e^{\zeta \Delta t}) \cdot \bar{\varphi}_j^{(1)} dz + \int_{z_{j-1}}^{z_j} (\theta^{m+1} - \theta^m e^{\zeta \Delta t}) \cdot \bar{\varphi}_{j-1}^{(2)} dz + \int_{t_m}^{t_{m+1}} k\lambda \left\{ \left[th(R_{j+1/2}) + th(R_{j-1/2}) \right] \cdot \theta_j - \left[\frac{\theta_{j+1} - \theta_j}{sh(2R_{j+1/2})} - \frac{\theta_j - \theta_{j-1}}{sh(2R_{j-1/2})} \right] \right\} \cdot e^{\zeta(t_{m+1}-t)} dt = 0. \quad (11)$$

Для аппроксимации краевых условий (5) сначала рассмотрим уравнение (9) при $j=1$ и исключим значение потока на левой границе, используя первое из условий (5), в итоге приходим к соотношению:

$$\int_{z_1}^{z_2} (\theta^{m+1} - \theta^m e^{\xi \Delta t}) \cdot \bar{\varphi}_1^{(1)} dz + \int_{t_m}^{t_{m+1}} k \lambda \left[th(R_{3/2}) \theta_1 - \frac{\theta_2 - \theta_1}{sh(2R_{3/2})} \right] \cdot e^{\xi(t_{m+1}-t)} dt = \int_{t_m}^{t_{m+1}} \tau \cdot e^{\xi(t_{m+1}-t)} dt. \quad (12)$$

Далее, запишем (10) для $j=n-1$ и исключим значение потока на правой границе, используя второе из условий (5):

$$\int_{z_{n-1}}^{z_n} (\theta^{m+1} - \theta^m e^{\xi \Delta t}) \cdot \bar{\varphi}_{n-1}^{(2)} dz + \int_{t_m}^{t_{m+1}} k \lambda \left[th(R_{n-1/2}) \theta_n + \frac{\theta_n - \theta_{n-1}}{sh(2R_{n-1/2})} \right] \cdot e^{\xi(t_{m+1}-t)} dt = - \int_{t_m}^{t_{m+1}} \tau_b \cdot e^{\xi(t_{m+1}-t)} dt. \quad (13)$$

Для вычисления интегралов в (11)-(13) используем следующие квадратурные формулы:

$$\int_{z_j}^{z_{j+1}} g(z) \cdot \bar{\varphi}_j^{(1)}(z) dz \approx g(z_j) \cdot \int_{z_j}^{z_{j+1}} \bar{\varphi}_j^{(1)}(z) dz; \quad \int_{z_j}^{z_{j+1}} g(z) \cdot \bar{\varphi}_j^{(2)}(z) dz \approx g(z_{j+1}) \cdot \int_{z_j}^{z_{j+1}} \bar{\varphi}_j^{(2)}(z) dz;$$

$$\int_{t_m}^{t_{m+1}} f(t) \cdot e^{\xi(t_{m+1}-t)} dt \approx [\sigma \cdot f(t_{m+1}) + (1-\sigma) \cdot f(t_m)] \cdot \int_{t_m}^{t_{m+1}} e^{\xi(t_{m+1}-t)} dt, \quad \sigma \in [0,1]$$

После аппроксимации интегралов в соотношениях (11)-(13) и некоторых преобразований приходим к следующей разностной схеме для вычисления решения задачи (4)-(6). Чтобы не усложнять формулы, мы не изменили обозначения для приближенного решения, считая: $\theta_j^m \approx \theta(z_j, t_m)$

$$\theta_1^{m+1} - \theta_1^m e^{\xi \Delta t} + \Delta t \cdot k \lambda^2 P(\xi \Delta t) \cdot S_t^{\sigma, m} \left[\theta_1 - \mu_1 \cdot \frac{\theta_2 - \theta_1}{sh(2R_{3/2})} \right] = \Delta t \cdot \lambda \mu_1 P(\xi \Delta t) \cdot S_t^{\sigma, m}(\tau); \quad (14)$$

$$\theta_j^{m+1} - \theta_j^m \cdot e^{\xi \Delta t} + \Delta t \cdot k \lambda^2 P(\xi \Delta t) S_t^{\sigma, m} \left\{ \theta_j - \mu_j \cdot \left[\frac{\theta_{j+1} - \theta_j}{sh(2R_{j+1/2})} - \frac{\theta_j - \theta_{j-1}}{sh(2R_{j-1/2})} \right] \right\} = 0, \quad j = 2, 3, \dots, n-1; \quad (15)$$

$$\theta_n^{m+1} - \theta_n^m e^{\xi \Delta t} + \Delta t \cdot k \lambda^2 P(\xi \Delta t) \cdot S_t^{\sigma, m} \left[\theta_n + \mu_n \cdot \frac{\theta_n - \theta_{n-1}}{sh(2R_{n-1/2})} \right] = -\Delta t \cdot \lambda \mu_n P(\xi \Delta t) \cdot S_t^{\sigma, m}(\tau_b). \quad (16)$$

В (14)-(16) введены обозначения:

$$P(x) = \frac{e^x - 1}{x} \quad S_t^{\sigma, m} \theta = \sigma \cdot \theta^{m+1} + (1-\sigma) \cdot \theta^m, \quad \sigma \in [0,1].$$

$$\mu_j = \begin{cases} \frac{ch(R_{j+1/2})}{sh(R_{j+1/2})}, & j = 1; \\ \frac{ch(R_{j+1/2})ch(R_{j-1/2})}{sh(R_{j+1/2} + R_{j-1/2})}, & j = 2, 3, \dots, n-1; \\ \frac{ch(R_{j-1/2})}{sh(R_{j-1/2})}, & j = n; \end{cases}$$

Отметим, что в разностной схеме (14)-(16) присутствуют два параметра: произвольное комплексное число λ и вещественное число $\sigma \in [0,1]$. Выбор этих параметров влияет на свойства схемы и возможность осуществления некоторого оптимального варианта такого выбора должна быть дополнительно изучена. В частности, выбор:

$$\lambda = (1+i)\sqrt{\frac{\ell}{2k}} \quad (17)$$

эквивалентен использованию стационарных тестовых функций при построении схемы:

$$\varphi_j^{(1)}(z, t) = \bar{\varphi}_j^{(1)}(z), \quad \varphi_j^{(2)}(z, t) = \bar{\varphi}_j^{(2)}(z)$$

и приводит к нулевому значению величины $\zeta = k\lambda^2 - i\ell$. Система разностных уравнений (14)-(16) может быть записана, как и схема работы [5], в «канонической» форме и решена методом прогонки [4] в комплексной форме.

Сравним свойства новой разностной схемы (14)-(16) и схемы, построенной в работе [5]. С этой целью проведем серию численных экспериментов, используя следующую тестовую задачу:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + i\ell\theta - \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) = 0, \quad 0 < z < H, \quad t > 0; \quad (18)$$

$$\begin{cases} z = 0 : k \frac{\partial \theta}{\partial z} = -\bar{\tau} \cdot e^{i\omega_1 t}, \\ z = H : k \frac{\partial \theta}{\partial z} = -\bar{\tau}_b \cdot e^{i\omega_2 t}; \end{cases} \quad t > 0, \quad (19)$$

$$t = 0 : \theta = \theta_0(z), \quad 0 \leq z \leq H. \quad (20)$$

Величины: $H > 0, k > 0, \ell, \omega_1, \omega_2$ – вещественные и $\bar{\tau}, \bar{\tau}_b$ – комплексные, являются параметрами задачи (18)-(20), выбирая эти параметры, мы можем моделировать дрейфовые течения Экмана в случае меняющихся во времени ветре и придонном трении. Будем считать, что выполнены условия:

$$\ell + \omega_1 > 0, \ell + \omega_2 > 0$$

Определим величины:

$$\lambda_1 = (1+i)\sqrt{\frac{\ell + \omega_1}{2k}}, \quad \lambda_2 = (1+i)\sqrt{\frac{\ell + \omega_2}{2k}}$$

и выпишем класс решений задачи (18)-(20) в виде:

$$\theta(z, t) = \frac{\tau}{k\lambda_1} \cdot \frac{e^{\lambda_1(H-z)} + e^{-\lambda_1(H-z)}}{e^{\lambda_1 H} - e^{-\lambda_1 H}} \cdot e^{i\omega_1 t} - \frac{\tau^b}{k\lambda_2} \cdot \frac{e^{\lambda_2 z} + e^{-\lambda_2 z}}{e^{\lambda_2 H} - e^{-\lambda_2 H}} \cdot e^{i\omega_2 t} + \varphi e^{-it}$$

В этом случае:

$$\theta_0(z) = \frac{\tau}{k\lambda_1} \cdot \frac{e^{\lambda_1(H-z)} + e^{-\lambda_1(H-z)}}{e^{\lambda_1 H} - e^{-\lambda_1 H}} - \frac{\tau^b}{k\lambda_2} \cdot \frac{e^{\lambda_2 z} + e^{-\lambda_2 z}}{e^{\lambda_2 H} - e^{-\lambda_2 H}} + \varphi.$$

Несложно проверить, что в случае:

$$\omega_1 = \omega_2 = 0 \tag{21}$$

мы получим тестовую задачу, рассмотренную в работе [5].

Обратимся, прежде всего, к одному из численных экспериментов работы [5]: он был проведен при следующих значениях параметров задачи (18)-(21) и предложенной в [5] разностной схемы:

$$T = 10, H = 10, \ell = 1, \varphi = 10, \bar{\tau} = 8, \bar{\tau}_b = 12, \sigma = 0,5, \Delta t = 0,1$$

На рис.1 представлен этот расчет при значении коэффициента вертикальной турбулентной вязкости $k = 0,05$ и 20-и узлах пространственной вычислительной сетки. В решениях $u(z, t)$ (нижняя кривая) и $v(z, t)$ (верхняя кривая) проявились пограничные слои, которые недостаточно эффективно описываются численным методом работы [5] (кривые с крестообразными маркерами, соответствующими сеточным узлам изображают на графике приближенные решения): относительные погрешности в этом случае составили 46% и 7,7% для функций $u(z, t)$ и $v(z, t)$, соответственно.

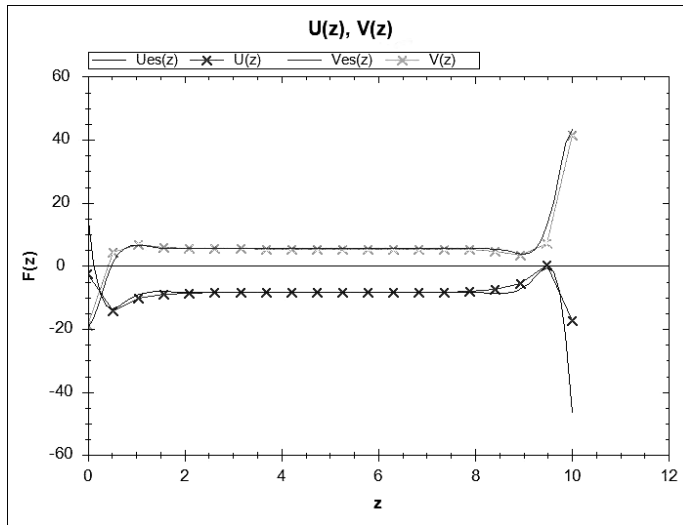
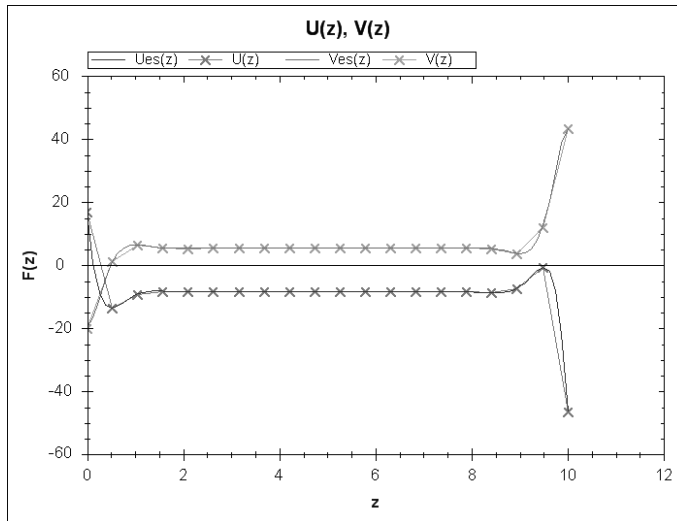
Рис. 1. ($k=0,05, n=20$, схема работы [5])

Схема (14)-(16), построенная в настоящей работе, при выборе параметра λ , осуществленном по формуле (17), показывает для этой задачи гораздо лучшие результаты: 0,07% и 0,11%, соответственно; графики точных и приближенных решений представлены на рис. 2. При увеличении числа узлов сетки точность схемы сохраняется (0,07% и 0,11%), несмотря на то, что сетка начинает «разрешать» пограничные слои и можно ожидать некоторого уменьшения точности. Напомним, что в случае схемы из работы [5] мы имели погрешности 5,3% и 3,3% для функций $u(z, t)$ и $v(z, t)$, соответственно.

Рис. 2. ($k=0,05, n=20$, схема (14)-(17))

Таким образом, проведенная в рамках ПВИИМ модификация позволила построить схему более точную, чем схема работы [5]: новая схема позволяет улавливать особенности Экмановских пограничных слоев даже при относительно небольшом числе узлов вычислительной сетки.

Литература

1. *Еремеев В. Н., Кочергин В. П., Кочергин С. В., Скляр С. Н.* Математическое моделирование гидродинамики глубоководных бассейнов. – Севастополь: ЭКОСИ-Гидрофизика, 2001. – 238 с.
2. *Марчук Г. И., Саркисян А. С.* Математическое моделирование циркуляции океана. – М.: Наука, 1988. – 302 с.
3. *Педлоски Дж.* Геофизическая гидродинамика. – Т. 1. – М.: Мир, 1984. – 398 с.
4. *Самарский А. А., Николаев Е. С.* Методы решения сеточных уравнений. – М.: Наука, 1978. – 592 с.
5. *Скляр С. Н., Рылов М. А.* Об аппроксимации уравнений движения в задачах о циркуляции жидкости в водоеме. – Академический вестник АУЦА. – 2008, № 2(8). – С. 229-238.
6. *Скляр С. Н.* О дискретизации задач с пограничным слоем при помощи одного проекционного варианта метода интегральных тождеств. 1. Несамосопряженное уравнение, первая краевая задача. – Изв. АН Киргизской ССР. Физ.-техн. и матем. науки. – 1988, № 4. – С. 10-23; 2. Несамосопряженное уравнение, третья краевая задача. – Там же, 1989, № 1. – С. 3-10; 3. Самосопряженное уравнение. – Там же, 1989, № 4. – С. 3-11.